1. Bereken zonder rekenmachine:

a) ${}^{2}\log\frac{1}{8}=-3$

b) $2.{}^{5}\log\left(5\sqrt{5}\right)={}^{5}\log\left[\left(5\sqrt{5}\right)^{2}\right]={}^{5}\log\left(125\right)=3$

c) ${}^{\frac{1}{3}}\log\sqrt{27}=\frac{{}^{3}\log\sqrt{27}}{{}^{3}\log\frac{1}{3}}=\frac{{}^{3}\log 3^{\frac{3}{2}}}{{}^{3}\log 3^{-1}}=\frac{3/2}{-1}=-\frac{3}{2}$

d) ${}^{3}\log\left(\frac{3.\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{3}}\right)={}^{3}\log 3+{}^{3}\log\sqrt[3]{9}-{}^{3}\log\sqrt[4]{3}=1+\frac{1}{3}\cdot{}^{3}\log 9-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}$

e) ${}^{4}\log\frac{\sqrt[3]{2}}{4}={}^{4}\log\sqrt[3]{2}-{}^{4}\log 4=\frac{{}^{2}\log\sqrt[3]{2}}{{}^{2}\log 4}-1=\frac{1/3}{2}-1=-\frac{5}{6}$

f) ${}^{8}\log 2\sqrt{2}=\frac{{}^{2}\log 2\sqrt{2}}{{}^{2}\log 8}=\frac{1+\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2}$

g) $\left({}^{3}\log 169\right)\left({}^{13}\log 243\right)=\left({}^{3}\log 13^{2}\right)\left(\frac{{}^{3}\log 243}{{}^{3}\log 13}\right)=2.\cancel{{}^{3}\log 13}.\frac{5}{\cancel{{}^{3}\log 13}}=10$

h) $\frac{1}{{}^{2}\log 36}+\frac{1}{{}^{3}\log 36}={}^{36}\log 2+{}^{36}\log 3={}^{36}\log 6=\frac{1}{2}$

i) ${}^{8}\log\left(\frac{\sqrt{32}}{16}\right)=x\Leftrightarrow 8^{x}=\frac{\sqrt{32}}{16}\Leftrightarrow 2^{3x}=\frac{2^{\frac{5}{2}}}{2^{4}}\Leftrightarrow 3x=\frac{5}{2}-4\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

2. Bewijs de formules:

a) ${}^{\frac{1}{b}}\log c={}^{b}\log\left(\frac{1}{a}\right).{}^{a}\log c$

$$RL={}^{b}\log\left(\frac{1}{a}\right).{}^{a}\log c=\frac{{}^{\frac{1}{b}}\log\frac{1}{a}}{{}^{\frac{1}{b}}\log b}.\frac{{}^{\frac{1}{b}}\log c}{{}^{\frac{1}{b}}\log a}=\frac{-\cancel{{}^{\frac{1}{b}}\log a}}{-1}.\frac{{}^{\frac{1}{b}}\log c}{\cancel{{}^{\frac{1}{b}}\log a}}={}^{\frac{1}{b}}\log c=LL$$

b) ${}^{a^{2}}\log b.{}^{x^{2}}\log a=\frac{{}^{x}\log b}{4}$

$$LL={}^{a^{2}}\log b.{}^{x^{2}}\log a=\frac{{}^{x}\log b}{{}^{x}\log a^{2}}\cdot\frac{{}^{x}\log a}{{}^{x}\log x^{2}}=\frac{{}^{x}\log b}{2.\cancel{{}^{x}\log a}}\cdot\frac{\cancel{{}^{x}\log a}}{2}=\frac{{}^{x}\log b}{4}=RL$$

3. Bepaal de inverse van de functie f met voorschrift $f(x) = 4.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} - 1\right]$.

$$x = 4.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3y} - 1\right] \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3y} = \frac{x}{4} + 1 \Leftrightarrow 3y = {}^{\frac{2}{3}}\log\left(\frac{x}{4}+1\right) \Leftrightarrow y = \frac{{}^{\frac{2}{3}}\log\left(\frac{x}{4}+1\right)}{3}$$

4. Bereken a in de volgende uitdrukkingen:

a) ${}^{a}\log 225 - 2.{}^{a}\log 5 = {}^{9}\log 81$

$$\Leftrightarrow {}^{a}\log 225 - {}^{a}\log 5^2 = 2 \Leftrightarrow {}^{a}\log\frac{225}{25} = 2 \Leftrightarrow {}^{a}\log 9 = 2 \Leftrightarrow a = 3$$

b) ${}^{a}\log 27 + 3.{}^{a}\log 2 = 3$

$$\Leftrightarrow {}^{a}\log 27 + {}^{a}\log 2^3 = 3 \Leftrightarrow {}^{a}\log(27.8) = 3 \Leftrightarrow a = 3.2 = 6$$

c) ${}^{a}\log 45 - 2.{}^{a}\log 3 + {}^{a}\log 20 = 2$

$${}^{a}\log 45 - {}^{a}\log 9 + {}^{a}\log 20 = 2 \Leftrightarrow {}^{a}\log\frac{45.20}{9} = 2 \Leftrightarrow {}^{a}\log 100 = 2 \Leftrightarrow a = 10$$

5. Bepaal het domein van de functie $f(x) = \sqrt{{}^{1/2}\log x - 2}$

$x \in dom\ f \Leftrightarrow \begin{cases} {}^{1/2}\log x - 2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ x > 0 \end{cases}$. Dus het domein is $dom\ f = \left]0, \frac{1}{4}\right]$.

$$*: {}^{1/2}\log x \geq 2 \Leftrightarrow {}^{1/2}\log x \geq {}^{1/2}\log\frac{1}{4} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}$$

6. Los op:

a) ${}^{3}\log(2x-1) + {}^{3}\log(x+1) = 2 \quad \left(BV: \begin{cases} 2x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x > 1/2}\right)$

$$\Leftrightarrow {}^{3}\log((2x-1).(x+1)) = {}^{3}\log 9 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee \cancel{x = -5/2} \qquad V = \{2\}$$

b) $2.{}^{4}\log x + {}^{2}\log(x-4) = 2 + \frac{1}{2.{}^{x-3}\log\sqrt{2}} \quad \left(BV: \begin{cases} x > 0 \\ x-4>0 \\ x-3>0 \\ x-3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 4 \\ x > 3 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x > 4}\right)$

$$\Leftrightarrow {}^{4}\log x^2 + {}^{2}\log(x-4) = 2 + \frac{1}{2}.{}^{\sqrt{2}}\log(x-3) \Leftrightarrow {}^{2}\log x + {}^{2}\log(x-4) = {}^{2}\log 4 + \frac{1}{\cancel{2}}.{}^{2}\log(x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow {}^{2}\log(x(x-4)) = {}^{2}\log(4(x-3)) \Leftrightarrow x^2 - 4x = 4x - 12 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow \cancel{x = 2} \vee x = 6$$

$V = \{6\}$

c) ${}^{x}\log(x^2 + 3x - 5) = 2 \quad \left(BV: \begin{cases} x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \\ x^2 + 3x - 5 > 0 \end{cases} \rightarrow controle\ achteraf!\right)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 = x^2 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \qquad V = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

d) $2.\log x+1=\log(17x+6)$ $\left(BV:\begin{cases}x>0\\17x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0\right)$

$\Leftrightarrow \log x^2+\log 10=\log(17x+6) \Leftrightarrow \log 10x^2=\log(17x+6) \Leftrightarrow 10x^2-17x-6=0$

$\Leftrightarrow x=2 \vee \cancel{x=-3/10}$ $\quad V=\{2\}$

7. Los op:

a) ${}^3\log(2x-5)>2$ $\left(BV:2x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}\right)$

$\Leftrightarrow {}^3\log(2x-5)>{}^3\log 9 \Leftrightarrow 2x-5>9 \Leftrightarrow x>7 \quad V=]7,+\infty[$

b) ${}^{1/3}\log 4x<{}^{1/3}\log(x-1)-2$ $\left(BV:\begin{cases}4x>0\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow \boxed{x>1}\right)$

$\Leftrightarrow {}^{1/3}\log 4x<{}^{1/3}\log(x-1)+{}^{1/3}\log 9$

$\Leftrightarrow {}^{1/3}\log 4x<{}^{1/3}\log(9x-9)$

$\Leftrightarrow 4x>9x-9$

$\Leftrightarrow x<\frac{9}{5} \quad V=\left]1,\frac{9}{5}\right[$

c) ${}^{2/3}\log(5-x)+2\leq 0$ $\left(BV:5-x>0 \Leftrightarrow \boxed{x<5}\right)$

$\Leftrightarrow {}^{2/3}\log(5-x)\leq -2 \Leftrightarrow {}^{2/3}\log(5-x)\leq {}^{2/3}\log\frac{9}{4} \Leftrightarrow 5-x\geq\frac{9}{4} \Leftrightarrow x\leq\frac{11}{4} \quad V=\left]-\infty,\frac{11}{4}\right]$

8. Bereken $\frac{1}{{}^2\log 2017!}+\frac{1}{{}^3\log 2017!}+\frac{1}{{}^4\log 2017!}+\ldots+\frac{1}{{}^{2017}\log 2017!}=*$

(denk eraan dat $2017!=1\times2\times3\times4\times\ldots\times2017$)

$*={}^{2017!}\log 2+{}^{2017!}\log 3+{}^{2017!}\log 4+\ldots+{}^{2017!}\log 2017={}^{2017!}\log(2.3.4.\ldots.2017)={}^{2017!}\log 2017!=1$

9. Bereken $\log 95^{-51}$ (schrijf je uitkomst in wetenschappelijke notatie).

$\log 95^{-51}=-51.\log 95\approx-100,8639039=-101+0,1360961303$

$\Rightarrow 95^{-51}=10^{-101+0,1360961303}=10^{0,1360961303}.10^{-101}\approx 1,3680.10^{-101}$

10. Beredeneer dat het aantal cijfers waaruit een natuurlijk getal $n\in\mathbb{N}_0$ bestaat gelijk is aan $\lfloor\log n\rfloor+1$.

Bereken dan met je rekenmachine uit hoeveel cijfers het getal 2^{2011} bestaat.

Het aantal cijfers waaruit een natuurlijk getal $n\in\mathbb{N}_0$ bestaat gelijk is aan $\lfloor\log n\rfloor+1$.

Dit klopt want: $\bullet\, 1\leq n<10 \Leftrightarrow \log 1\leq\log n<\log 10 \Leftrightarrow 0\leq\log n<1 \Leftrightarrow \lfloor\log n\rfloor=0$,

$\bullet\, 10\leq n<100 \Leftrightarrow \log 10\leq\log n<\log 100 \Leftrightarrow 1\leq\log n<2 \Leftrightarrow \lfloor\log n\rfloor=1$,

$\bullet\, 100\leq n<1000 \Leftrightarrow \log 100\leq\log n<\log 1000 \Leftrightarrow 2\leq\log n<3 \Leftrightarrow \lfloor\log n\rfloor=2$,

enzovoort…

Voor $n=2^{2017}$ geeft dit $\lfloor \log 2^{2017} \rfloor + 1 = \lfloor 2017.\log 2 \rfloor + 1 = 608$. Het getal 2^{2017} bestaat dus uit 608 cijfers.

Een iets omslachtigere manier om dit aan te tonen is na te rekenen dat:

$$\begin{aligned}2^{2017} = \ & 15048778649098708900024591334476113300977322584816945731700558880122683541322\\ & 076177782007219047710981075054947716136472064126077643824238840065967471547\\ & 556631560845937254371164250279660518119161387932318441601269076015902051059\\ & 4156393027372371760059476744597088714619366859904916682587045280041169020954\\ & 4520914290723841094524631508383274291152826332302546423024408417086085818064\\ & 9908473861473732904002152903343524599316744998729600734613976276435145967459\\ & 8804149922109794266106654935167902622962982037429132231421101363073317321335\\ & 6779824859254302754506344699468563098145164765665236795551709280980557837107\\ & 2\end{aligned}$$

11. Bewijs dat geldt: $\forall x, y \in]1, +\infty[:\ {}^{x}\log y + {}^{y}\log x > 2$.

$${}^{x}\log y + {}^{y}\log x > 2 \Leftrightarrow \frac{\log y}{\log x} + \frac{\log x}{\log y} > 2 \Leftrightarrow \frac{\log^2 y + \log^2 x}{\log x.\log y} > 2 \overset{*}{\Leftrightarrow} \log^2 y + \log^2 x > 2.\log x.\log y$$

$$\Leftrightarrow \log^2 y - 2.\log x.\log y + \log^2 x > 0 \ \Leftrightarrow \ (\log y - \log x)^2 > 0 \ \square$$

*: de noemer is positief want $x > 1 \Leftrightarrow \log x > 0$ en $y > 1 \Leftrightarrow \log y > 0$. Als we beide leden dus vermenigvuldigen met $\log x.\log y$ blijft het teken behouden.

12. Schrijf de volgende uitdrukking in functie van $\log x$, $\log y$ en $\log z$:

a) $$\log\left(\frac{x^3.\sqrt[4]{10y^5}}{1000.z^2}\right) = \log x^3 + \frac{1}{4}\log 10y^5 - \log 1000 - \log z^2 = 3\log x + \frac{1}{4}(1 + 5\log y) - 3 - 2\log z$$
$$= 3\log x + \frac{5}{4}\log y - 2\log z - \frac{11}{4}$$

b) $$\log\sqrt[3]{\frac{a^5c}{b^2}} = \frac{1}{3}.\log\frac{a^5c}{b^2} = \frac{1}{3}\left(\log a^5c - \log b^2\right) = \frac{1}{3}\left(\log a^5 + \log c - \log b^2\right) = \frac{1}{3}(5\log a + \log c - 2\log b)$$
$$= \frac{5}{3}\log a - \frac{2}{3}\log b + \frac{1}{3}\log c$$

13. Bij de tandarts wordt een patiënt ingespoten met xylocaïne, een verdovend middel. Daardoor voelt de patiënt plaatselijk voor een tijdje geen pijn meer. De concentratie xylocaïne bedraagt bij de inspuiting 80 ml/g (milliliter per gram), en neemt elke minuut af met 5%.

a) Stel het functievoorschrift op van de concentratie $C(t)$ xylocaïne in functie van de tijd.

$C(t) = 80.0,95^t$, met C in ml/g en t in minuten.

b) Wat is de concentratie xylocaïne één minuut na de inspuiting? En wat één uur later? Rond je antwoorden af op 0,001 ml/g nauwkeurig.

$C(1) = 80.0,95 = 76$ (ml/g)

$C(60) = 80.0,95^{60} = 3,686$ (ml/g)

c) Een patiënt begint terug pijn te voelen eens de concentratie xylocaïne minder dan 30 ml/g bedraagt. Hoe lang mag een ingreep maximaal duren opdat de patiënt geen pijn zou voelen tijdens de ingreep? Bereken dit exact (met behulp van logaritmen), en rond daarna je antwoord af op de seconde nauwkeurig.

$$C(t) \geq 30 \Leftrightarrow 80.0,95^t \geq 30 \Leftrightarrow 0,95^t \geq \frac{3}{8} \Leftrightarrow t.\log 0,95 \geq \log\frac{3}{8} \Leftrightarrow t \leq \frac{\log(3/8)}{\log 0,95} \approx 19,12198$$

De operatie mag maximaal 19 minuten en 7 seconden duren.

14. Op "warme-truiendag" wordt om 7u 's morgens de verwarming uitgezet. Daardoor verliezen de klaslokalen uiteraard warmte, want het is buiten kouder dan binnen.

De binnentemperatuur wordt gegeven door de functie $T(t) = 8 + 10.(0,8)^t$, met t het tijdstip op de dag uitgedrukt in uur na het uitzetten van de verwarming ($t = 0$ correspondeert met 7u), en T uitgedrukt in °C.

a) Hoe warm is het in een lokaal op het moment dat de verwarming wordt uitgezet?

$T(0) = 8 + 10.(0,8)^0 = 18$. Het is om 7u 's ochtends dus 18°C.

b) Hoe warm is het nog om 8u30 's morgens, als het eerste lesuur begint? *(rond af op 0,01°C).*

$T(1,5) = 8 + 10.(0,8)^{1,5} \approx 15,16$. Om 8u30 is het al maar 15,16°C meer.

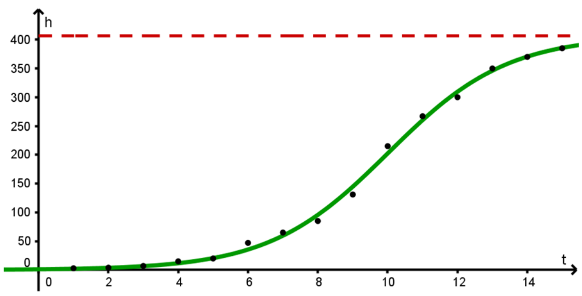
c) Vorm de formule om zodat het tijdstip gegeven wordt in functie van de temperatuur.

$$T = 8 + 10.(0,8)^t \Leftrightarrow \frac{T-8}{10} = 0,8^t \Leftrightarrow t = {}^{0,8}\log\frac{T-8}{10}$$

d) Bereken wanneer het nog amper 10°C zal zijn in een lokaal? *(rond af op de minuut).*

$t(10) = {}^{0,8}\log\frac{10-8}{10} \approx 7,212567$. Om 14u13 zakt de temperatuur onder de 10°C.

15. Zonnebloemen zijn snelgroeiende planten die vaak worden gebruikt voor de productie van olie. Om zicht te krijgen op het groeiproces van zonnebloemen, worden regelmatig metingen gedaan. Bij een experiment is van een zonnebloem gedurende vijftien weken elke week de lengte gemeten. Het resultaat van deze metingen is hieronder met stippen weergegeven.



# weken	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
hoogte	1	3	4	7	15	20	47	65	85	131	215	267	300	350	370	385

De hoogte van de zonnebloem gedraagt zich duidelijk logistisch in functie van de tijd.

a) Voer met je rekenmachine een logistische regressie uit. Rond alle parameters af op 5 decimalen.

$$h(t) \approx \frac{406,61943}{1+348,56734\,.\,e^{-0,58447.t}}$$

b) Hoe groot zal de zonnebloem maximaal worden volgens dit model? Rond af op 1 mm.

De maximale grootte vind je terug in de teller, dus die is ongeveer 406,6 cm.

c) Bereken na hoeveel weken de exponentiële fase eindigt.

De exponentiële fase eindigt als de grootte de helft is van de maximale grootte. Dus:

$$h(t) \approx 203,309715 \Leftrightarrow 203,309715 \approx \frac{406,61943}{1+348,56734\,.\,e^{-0,58447.t}} \Leftrightarrow 1+348,56734\,.\,e^{-0,58447.t} \approx 2$$

$$\Leftrightarrow t \approx \frac{\ln 348,56734}{0,58447} \approx 10,016$$

De exponentiële fase eindigt dus na ongeveer 10 weken. Dat kon je ook uit de tabel aflezen trouwens.