Formularium integraalrekening

a) Definities en eigenschappen

- Gelijke grenzen: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Verwisselen van grenzen: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- Optelbaarheid: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- Lineariteit: $\int_a^b \left(r.f(x) + s.g(x)\right)dx = r.\int_a^b f(x)\,dx + s.\int_a^b g(x)\,dx$
    - $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
    - $\int_a^b \left(r.f(x)\right)dx = r.\int_a^b f(x)\,dx$

b) Middelwaardestelling en hoofdstelling

- De integraalfunctie van f met ondergrens a is de functie $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
- De gemiddelde functiewaarde in een interval $[a,b]$ van functie f is $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$.
- De hoofdstelling: als f continu is in $[a,b]$, dan geldt in $[a,b]$ dat $D\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$.
- We noemen F een primitieve functie van f als en slechts als $DF = f$.
- Als F een primitieve is van f (continu in $[a,b]$), dan is $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

c) Oneigenlijke integralen

- Eerste soort:
    - $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
    - $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
- Tweede soort: als $c \in [a,b]$ en $[a,b] \setminus \{c\} \subset dom\ f$, dan geldt:
    - Als $a = c$: $\int_c^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{a\to c\\ >}} \int_a^b f(x)\,dx$
    - Als $b = c$: $\int_a^c f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{b\to c\\ <}} \int_a^b f(x)\,dx$
    - Als $c \in \,]a,b[$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{k\to c\\ <}} \int_a^k f(x)\,dx + \lim\limits_{\substack{k\to c\\ >}} \int_k^b f(x)\,dx$

d) Toepassingen van integraalrekening

Functies gegeven door een functievoorschrift

- De georiënteerde oppervlakte A begrepen tussen de grafiek van f en de x-as in het interval $[a,b]$ wordt gegeven door $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

- De booglengte van de grafiek van de functie f die afleidbaar is in $[a,b]$ wordt gegeven door de formule $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.
- Noem $\mathcal{L}$ het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de afleidbare functie f in het interval $[a,b]$ te wentelen om de x-as, dan geldt:
    - De inhoud van $\mathcal{L}$ is dan $V=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$.
    - De manteloppervlakte van $\mathcal{L}$ is dan $A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Parameterkrommen

Als een kromme $\mathcal{C}$ gegeven wordt in parametercoördinaten $\mathcal{C}\leftrightarrow\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, dan geldt:

- De georiënteerde oppervlakte A begrepen tussen de grafiek van $\mathcal{C}$ en de x-as in het interval $t\in[t_1,t_2]$ wordt gegeven door $A=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$.
- De georiënteerde oppervlakte A begrepen tussen de grafiek van $\mathcal{C}$ en de y-as in het interval $t\in[t_1,t_2]$ wordt gegeven door $A=\int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt$.

  (Let er hierbij op dat t zo gekozen wordt dat je integratie-interval strikt stijgend is.)

- De booglengte van de grafiek van $\mathcal{C}$ in het interval $t\in[t_1,t_2]$ wordt gegeven door $L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$
- Noem $\mathcal{L}$ het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van $\mathcal{C}$ in interval $t\in[t_1,t_2]$ te wentelen om de x-as, dan geldt:
    - De inhoud van $\mathcal{L}$ is dan $V=\pi\int_{t_1}^{t_2}\left(y(t)\right)^2 x'(t)dt$.
    - De manteloppervlakte van $\mathcal{L}$ is dan $A=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$

Poolcoördinaten

- De oppervlakte ingesloten tussen de grafiek van $\mathcal{K}\leftrightarrow r=f(\theta)$ en de stralen $\theta=\theta_1$ en $\theta=\theta_2$ wordt gegeven door $A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$.
- De booglengte van de grafiek van $\mathcal{K}\leftrightarrow r=f(\theta)$ tussen de stralen $\theta=\theta_1$ en $\theta=\theta_2$ wordt gegeven door $L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$.

e) Onbepaalde integralen

Gevolgen van de hoofdstelling

- $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
- $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$
- $D\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

Fundamentele integralen

- $\int dx = x + C$
- $\int x^q dx = \dfrac{x^{q+1}}{q+1} + C$ (met $q \neq -1$)
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Bgsin}\, x + c$
- $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \text{Bgtan}\, x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$

Integratie door substitutie

- Als F een primitieve is van f, en g is een afleidbare functie, dan geldt:

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)\, dx = F\left(g(x)\right) + c$$

(Vergeet bij bepaalde integralen ook je grenzen niet aan te passen.)

- Handige formules: $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} \text{Bgtan}\, \dfrac{x}{a} + C$ en $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{Bgsin}\, \dfrac{x}{a} + C$

Partiële integratie

- $\int u dv = uv - \int v du$

Goniometrische integralen

- Handige formules: $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ en $\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

Goniometrische substituties

- *Type 1:* de vorm $\sqrt{a^2-x^2}$ komt voor (met $a > 0$)
  - stel $x = a\sin t$, dan is $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, met $t \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$ en $dx = a\cos t$.
- *Type 2:* de vorm $\sqrt{x^2-a^2}$ komt voor (met $a > 0$)
  - stel $x = a\sec t$, dan is $\sqrt{x^2-a^2} = \begin{cases} a\tan t & \text{, als } t \in \left[0, \pi/2\right[\quad (\text{en dus } x \geq a) \\ -a\tan t & \text{, als } t \in \left]\pi/2, \pi\right] \quad (\text{en dus } x \leq -a) \end{cases}$,

    en $dx = a\sec t \tan t \, dt$.
- *Type 3:* de vorm $\sqrt{x^2+a^2}$ komt voor (met $a > 0$)
  - stel $x = a\tan t$, dan is $\sqrt{x^2+a^2} = a\sec t$, met $t \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$ en $dx = a\sec^2 t \, dt$.

f) Integralen in de fysica

Zwaartepunt

Zwaartepunt van oppervlaktedeel tussen de grafiek van f en de x-as:

Het zwaartepunt is $Z(x_Z, y_Z)$, met $x_Z = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$ en $y_Z = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$.

Afgelegde weg – Snelheid – Versnelling

Voor de afgelegde weg s, de snelheid v en de versnelling a van een object geldt het verband:

$$\frac{dx}{dt} = v,\ \frac{dv}{dt} = a \text{ en dus ook } v = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \text{ en } x = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

Kracht en arbeid

Voor de kracht F en de arbeid W die een object aflegt geldt het verband:

$$\frac{dW}{ds} = F \text{ en dus ook } W = \int_{s_1}^{s_2} F\,ds$$