Telproblemen & kansrekenen

La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul

Pierre Simon Laplace
° Beaumont-en-Auge, 23 maart 1749
✝ Parijs, 5 maart 1827

1) Telproblemen

Handig tellen vereist een systematische aanpak. Door problemen met elkaar te vergelijken stuit je vaak op allerlei overeenkomsten en regelmatigheden. De kunst is vaak die regelmaat te ontdekken.

We herhalen eerst enkele basisregels en afspraken die we al kennen uit het vierde jaar.

a) Basisregels

In de meest abstracte zin gaat het bij telproblemen altijd over het tellen van elementen van een *gebeurtenis* G die een deelverzameling is van een *uitkomstenverzameling* U (ook wel *universum* genoemd). Het aantal elementen van die gebeurtenis noteren we met $\#G$.

De productregel

Bestaat een gebeurtenis G uit een aantal opeenvolgende deelgebeurtenissen $G_1, G_2, ..., G_n$ (die onafhankelijk zijn van elkaar) dan geldt: $\#G = \#G_1 . \#G_2 . ... . \#G_n$.

Voorbeeld: Hoeveel codes kan je maken bestaande uit twee letters gevolgd door een cijfer?

Enkele voorbeelden zijn AJ1, KB4, ZZ7, ...

De gebeurtenis $G =$ 'kies een code' kan dus opgesplitst worden in drie opeenvolgende onafhankelijke gebeurtenissen: $G_1 =$ 'kies de eerste letter', $G_2 =$ 'kies de tweede letter' en $G_3 =$ 'kies het cijfer'.

Dus $\#G = \#G_1 . \#G_2 . \#G_3 = 26.26.10 = 6760$

De somregels

Disjuncte gebeurtenissen

Bestaat een gebeurtenis G uit twee verschillende mogelijke gebeurtenissen G_1 of G_2 die elkaar niet overlappen (die disjunct zijn, dus $G_1 \cap G_2 = \emptyset$) dan geldt: $\#G = \#G_1 + \#G_2$

Voorbeeld: Op hoeveel manieren kan je een dame of een heer trekken uit een boek kaarten?

Deze gebeurtenis G valt duidelijk uiteen in twee disjuncte gebeurtenissen $G_1 =$ 'trek een heer' en $G_2 =$ 'trek een dame'.

Dus $\#G = \#G_1 + \#G_2 = 4 + 4 = 8$.

Niet-disjuncte gebeurtenissen

Overlappen de gebeurtenissen (dus $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$) , dan geldt $\#G = \#G_1 + \#G_2 - \#\left(G_1 \cap G_2\right)$.

Dit is eenvoudig in te zien want als je de som neemt van $\#G_1$ en $\#G_2$ dan tel je de doorsnede dubbel.

Voorbeeld: Op hoeveel manieren kan je een hartenkaart of een aas trekken uit een boek kaarten?

Hier zijn de gebeurtenissen $G_1 =$ 'trek een hartenkaart' en $G_2 =$ 'trek een aas' duidelijk niet disjunct, want $G_1 \cap G_2 =$ 'trek hartenaas'.

Dus $\#G = \#G_1 + \#G_2 - \#\left(G_1 \cap G_2\right) = 13 + 4 - 1 = 16$.

De complementregel

Is een gebeurtenis bijna gelijk aan de volledige uitkomstenverzameling dan is het soms handiger om de complementaire gebeurtenis te bekijken. We noemen $\overline{G}$ de complementaire gebeurtenis van G als en slechts als $G \cap \overline{G} = \varnothing$ en $G \cup \overline{G} = U$ (Dit kan ook genoteerd worden als $\overline{G} = U \setminus G$).

Hierbij geldt $\#\overline{G} = \#U - \#G$.

Voorbeeld: Op hoeveel mogelijke dagen kan iemand niet in januari jarig zijn (in een gewoon jaar)?

De gebeurtenis $\overline{G} =$'niet in januari jarig zijn' is uiteraard het complement van $G =$'in januari jarig zijn'.

Dus $\#\overline{G} = \#U - \#G = 365 - 31 = 334$. (in een schrikkeljaar zou dit dus 335 zijn)

b) Permutaties – Variaties – Combinaties (keuzes zonder herhaling)

In het vierde jaar zagen we ook reeds iets lastigere telproblemen. Deze konden vaak worden voorgesteld met behulp van een handige visualisatie zoals een boom of een wegendiagram. Dit is zeker niet voor alle telproblemen opportuun. We proberen daartoe enkele verschillende telprincipes te categoriseren.

Permutaties

Bij heel veel telproblemen is het van belang om in te zien of de volgorde van verschillende elementen een rol speelt of niet. Zo is het bij kaartspelen meestal niet belangrijk in welke volgorde je je kaarten krijgt toegedeeld, maar de volgorde van ploegen in een rangschikking uiteraard wel.

Voorbeeld

Hoeveel mogelijke rangschikkingen zijn er in een competitie van 16 ploegen?

Voor de eerste plaats zijn er 16 mogelijkheden, voor de tweede plaats nog 15 mogelijkheden, voor de derde plaats nog 14 mogelijkheden, enz.

In totaal zijn er dus $16! = 16.15.14.\ldots.3.2.1$ mogelijke rangschikkingen.

Algemeen

Het aantal manieren waarop we n elementen kunnen rangschikken noteren we met P_n. Dit heet een *permutatie* van n elementen. Er geldt: $\boxed{P_n = n!}$.

Variaties

Bij gebeurtenissen waarbij de **volgorde belangrijk** is en waarbij er **geen herhaling mogelijk** is spreken we van *variaties*.

Voorbeeld:

In Rio 2016 namen 31 atletes deel aan de zevenkamp. Hoeveel verschillende podia (top drie) zijn er mogelijk?

Voor goud zijn er 31 mogelijkheden, voor zilver nog 30 mogelijkheden en voor brons 29 mogelijkheden.

In totaal zijn er dus $31.30.29 = 26970$ mogelijke podia.

Algemeen

Het aantal manieren waarop we in volgorde p verschillende elementen kunnen kiezen uit een verzameling van n elementen noteren we met V_n^p. Dit heet een *variatie* van p uit n elementen.

Er geldt: $\boxed{V_n^p = \underbrace{n.(n-1).\ldots.(n-p+1)}_{p\ factoren}}$, of korter geschreven: $\boxed{V_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$.

Opmerking

Een permutatie kunnen we dus ook beschouwen als een variatie van n uit n elementen. $P_n = V_n^n$.

Combinaties

Bij gebeurtenissen waarbij de **volgorde niet belangrijk** is en waarbij er **geen herhaling mogelijk** is spreken we van *combinaties*.

Voorbeeld

Op hoeveel manieren kan je 5 kaarten uitgedeeld krijgen uit een boek van 52 kaarten.

Mocht de volgorde hier wel een rol spelen dan was dit $V_{52}^5 = 52.51.50.49.48 = 311875200$. Maar de volgorde waarin je de kaarten krijgt speelt uiteraard geen rol. We zagen reeds dat het aantal mogelijke volgordes waarin je de kaarten kan krijgen gegeven wordt door $P_5 = 5! = 120$. Elke mogelijke kaartencombinatie komt dus in de bovenstaande bewerking 120 keer voor. Het gezochte aantal kaartencombinaties is dus $\dfrac{311875200}{120} = 2598960$.

Algemeen

Het aantal manieren waarop we zonder volgorde p elementen kunnen kiezen uit een verzameling van n elementen noteren we met C_n^p. Dit heet een *combinatie* van p uit n elementen.

Er geldt: $\boxed{C_n^p = \dfrac{V_n^p}{P_p}}$, of directer: $\boxed{C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$.

Eigenschap

Stelling: $C_n^p = C_n^{n-p}$

Bewijs: $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p$ □

Alternatief bewijs: Om te tellen op hoeveel manieren je zonder volgorde p elementen uit een verzameling van n elementen kan kiezen, kan je evengoed kiezen welke $n-p$ elementen je niet zal kiezen. Dus $C_n^p = C_n^{n-p}$. □

c) Keuzes met herhaling

Herhalingspermutaties

Analoog aan permutaties gaat het hier om een aantal mogelijke volgordes maar nu zijn er dus een aantal elementen die herhaald worden.

Eerste voorbeeld

Hoeveel anagrammen bestaan er van '*TOM MARVOLO RIDDLE'?* Spaties spelen hierbij geen rol.

Dit is een woord van 16 letters. Er bestaan dus 16! Mogelijke volgordes. Maar daarbij mogen we de 3 letters 'O' onderling van plaats wisselen (3! mogelijke manieren). Ook de andere gelijke letters mogen onderling van plaats wisselen ('L', 'D', 'R' en 'M' op telkens 2! mogelijke manieren).

Het totale aantal anagrammen is dus $\dfrac{16!}{\underbrace{3!}_{3\times o}\cdot\underbrace{2!}_{2\times m}\cdot\underbrace{2!}_{2\times r}\cdot\underbrace{2!}_{2\times l}\cdot\underbrace{2!}_{2\times d}} = 217945728000$.

Tweede voorbeeld

Jan maakt een multiple choice toets waarvoor hij totaal niet gestudeerd heeft. De toets bestaat uit 15 vragen en elke vraag heeft drie antwoordmogelijkheden. Hij besluit te gokken maar wel zo dat hij elke mogelijkheid even vaak antwoordt. Op hoeveel manieren kan Jan zijn toets invullen?

Dit komt neer op het aantal anagrammen zoeken van het 'woord' AAAAABBBBBCCCCC. Het antwoord is dus: $\frac{15!}{5!5!5!} = 756756$ mogelijkheden.

Algemeen

Het aantal manieren waarop je n elementen kan rangschikken, waarbij er n_1 identieke elementen zijn van een eerste soort, n_2 identieke elementen van een tweede soort n_2, enz. (met $n_1 + n_2 + ... = n$) is gelijk aan $\overline{P_n^{n_1,n_2,...}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ...}$. We noemen dit een herhalingspermutatie.

Opmerking

Elke herhalingspermutatie kan ook berekend worden met combinaties.

Hernemen we het tweede voorbeeld dan zijn er 5 van de 15 mogelijke vragen waar Jan A kan invullen, dan nog 5 van de 10 mogelijkheden waar hij B kan invullen. Alle overige vragen beantwoordt hij met C.

Op deze manier vinden we dat het antwoord gelijk is aan: $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 = 3003.252 = 756756$.

Herhalingsvariaties

Bij gebeurtenissen waarbij de **volgorde belangrijk** is en waarbij er **herhaling mogelijk** is spreken we van herhalings*variaties*.

Voorbeeld:

In een klas van 15 leerlingen moet elke leerling een sport kiezen voor sportdag. Er is keuze uit 4 sporten. Op hoeveel verschillende manieren kan deze klas kiezen voor hun sportdag?

De eerste leerling heeft 4 keuzes, de tweede leerling heeft 4 keuzes, enz. In totaal zijn er dus $4^{15} = 1073741824$ mogelijkheden.

Algemeen

Het aantal manieren waarop we in volgorde p al dan niet verschillende elementen kunnen kiezen uit een verzameling van n elementen noteren we met $\overline{V_n^p}$. Dit heet een *herhalingsvariatie* van p uit n elementen.

Er geldt: $\boxed{\overline{V_n^p} = n^p}$.

Herhalingscombinaties

Bij gebeurtenissen waarbij de **volgorde niet belangrijk** is en waarbij er **herhaling mogelijk** is spreken we van *herhalingscombinaties*.

Voorbeeld

Een leerkracht besluit voor zijn verjaardag zijn klas van 15 leerlingen te trakteren op boterkoeken. Er is keuze uit 4 verschillende boterkoeken. Hoeveel mogelijke verschillende bestellingen kan hij bij zijn bakker doen?

Dit probleem is eenvoudig visueel voor te stellen (en te herleiden tot een gewone combinatie):

De leerkracht moet 15 boterkoeken bestellen uit 4 soorten. We stellen de boterkoeken voor door bolletjes (o) en plaatsen hiertussen 3 streepjes (|) om de verschillende soorten aan te duiden.

Stel dat de boterkoeken van type A, B, C of D zijn. We herschrijven twee bestellingen op deze manier:

AAABBBBBBBCDDDD $\rightarrow$ ooo|ooooooo|o|oooo

BBBBBBBBBBDDDDD $\rightarrow$ |oooooooooo||ooooo

Het komt er dus op neer dat hij 3 (=4-1) streepjes moet plaatsen op 18 (=15+4-1) mogelijke plaatsen, of dat hij 15 bolletjes moet plaatsen op 18 mogelijke plaatsen. Dit is een combinatie van 15 uit 18 elementen.

Het aantal mogelijke bestellingen is dus $C_{18}^{3} = C_{18}^{15} = 816$

Algemeen

Het aantal manieren waarop we zonder volgorde p al dan niet verschillende elementen kunnen kiezen uit een verzameling van n elementen noteren we met $\overline{C_n^p}$. Dit heet een *herhalingscombinatie* van p uit n elementen.

Er geldt: $\boxed{\overline{C_n^p} = C_{n+p-1}^{p} = C_{n+p-1}^{n-1}}$, of directer: $\boxed{\overline{C_n^p} = \dfrac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}}$.

2) Het binomium van Newton

We kennen al de formules voor de 'merkwaardige producten' $(x+y)^2$ en $(x+y)^3$. We proberen dit nu te veralgemenen naar een formule voor $(x+y)^n$, met $n \in \mathbb{N}_0$. We merken het volgende op:

$$
\begin{array}{lcccccc}
(x+y)^0 & = & 1 & & 1 & & C_0^0 \\
(x+y)^1 & = & x+y & & 1 \quad 1 & & C_1^0 \quad C_1^1 \\
(x+y)^2 & = & x^2+2xy+y^2 & \dashrightarrow & 1 \quad 2 \quad 1 & \dashrightarrow & C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
(x+y)^3 & = & x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 & & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & & C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
(x+y)^4 & = & x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 & & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & & C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4
\end{array}
$$

Ons vermoeden is dus dat: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$. We bewijzen deze stelling in twee stappen:

Lemma: $\forall p, n \in \mathbb{N}_0$ (met $n \geq p$): $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$ (de formule van Stifel-Pascal)

Bewijs: $C_n^p + C_n^{p-1} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} + \dfrac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \dfrac{n!(n-p+1)}{p!(n-p+1)!} + \dfrac{n!\,p}{p!(n-p+1)!}$

$$= \frac{n!(n\cancel{-p}+1\cancel{+p})}{p!(n-p+1)!} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} = C_{n+1}^p \quad \square$$

Stelling: $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$ (het binomium van Newton)

Bewijs: De formule klopt voor $n=1$, want $(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k x^{1-k} y^k = C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 = x+y$.

We nemen nu aan dat de formule klopt voor n, en leiden hieruit af dat ze klopt voor $n+1$.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k\right) \\
&= (x+y)\cdot\left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n\right) \\
&= C_n^0 x^{n+1} + C_n^1 x^n y + C_n^2 x^{n-1} y^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^2 y^{n-1} + C_n^n x y^n \\
&\quad + C_n^0 x^n y + C_n^1 x^{n-1} y^2 + C_n^2 x^{n-2} y^3 + \ldots + C_n^{n-1} x y^n + C_n^n y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \left(C_n^0 + C_n^1\right) x^n y + \left(C_n^1 + C_n^2\right) x^{n-1} y^2 + \ldots + \left(C_n^{n-2} + C_n^{n-1}\right) x^2 y^{n-1} + \left(C_n^{n-1} + C_n^n\right) x y^n + y^{n+1} \\
&= C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n y + C_{n+1}^2 x^{n-1} y^2 + \ldots + C_{n+1}^{n-1} x^2 y^{n-1} + C_{n+1}^n x y^n + C_{n+1}^{n+1} y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{n+1-k} y^k \quad \square
\end{aligned}
$$

Alternatief bewijs: $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$. Om dit product uit te rekenen moet je uit elk van de n factoren ofwel de x kiezen ofwel de y, deze vermenigvuldigen en dan daarna al deze factoren optellen (distributiviteit). Als je k keer y kiest, kies je dus automatisch ook $n-k$ keer x.
Het aantal manieren dat je k keer y kan kiezen uit de n factoren is C_n^k (want de volgorde speelt geen rol en er is geen herhaling). Er geldt dus wel degelijk dat $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$. $\square$

Opmerkingen

De coëfficiënten C_n^k noemen we binomiaalcoëfficiënten.

Vervangen we y door $-y$, dan wordt de formule:

$$(x-y)^n = \left(x+(-y)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}(-y)^k = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 - \ldots \pm C_n^{n-1}xy^{n-1} \mp C_n^n y^n$$

(De plustekens en mintekens in deze som wisselen elkaar af – dit heet *alternerend*).

Voorbeeldoefening

Bepaal de term in x^5 in de ontwikkeling van $\left(3x^2 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$.

We weten dat $\left(3x^2 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} C_5^k \left(3x^2\right)^{5-k}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^k$.

De termen zijn $C_5^k \left(3x^2\right)^{5-k}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_5^k 3^{5-k} x^{10-2k}.(-2)^k x^{-\frac{k}{2}} = C_5^k 3^{5-k}(-2)^k x^{10-2k-\frac{k}{2}}$

De term in x^5 wordt dus bereikt als $10-2k-\dfrac{k}{2} = 5 \Leftrightarrow k = 2$.

De coëfficiënt is dan $C_5^2 3^{5-2}(-2)^2 = 10.27.4 = 1080$, dus de term in x^5 is $1080x^5$.

Belangrijke opmerking in verband met notatie

In heel veel handboeken wordt ook de Amerikaanse notatie voor combinaties $\dbinom{n}{k}$ gebruikt voor C_n^k.

3) Kansrekenen

a) Inleidende begrippen en definities

Kansen

Wiskundig gezien is **kans** een getal tussen 0 en 1 dat aangeeft hoe (on)waarschijnlijk een bepaalde gebeurtenis is. Een 0 betekent dat het **onmogelijk** gebeurt en een 1 betekent dat het **zeker** gebeurt. In de praktijk kun je alle waarden tussen 0 en 1 tegenkomen.

Een voorbeeld van een kans van 0: **De kans dat SK Beveren dit jaar de Champions League wint.**

Een voorbeeld van een kans van 1: **De kans dat uw leraar wiskunde ouder wordt dan 30 jaar.**

Notatie:

De meest algemene definitie van kans hanteert het begrip gebeurtenis. Je kan een gebeurtenis A definiëren als een deelverzameling van alle mogelijke gebeurtenissen binnen die context die we dan de uitkomstenverzameling U noemen.

De kans op een gebeurtenis $A \subset U$ noteren we dan met $P(A)$. Er geldt dus altijd $0 \leq P(A) \leq 1$.

De onmogelijke gebeurtenis wordt met $\varnothing$ genoteerd, zodat geldt $P(\varnothing) = 0$.

De zekere gebeurtenis is het universum zelf, en daarvoor geldt uiteraard dat $P(U) = 1$.

Een elementaire gebeurtenis is een deelverzameling van U die slechts uit één element bestaat.

Voorbeeld:

Bij het trekken van een kaart uit een kaartspel is $U = \left\{ \boxed{\heartsuit 1}, \boxed{\heartsuit 2}, \boxed{\heartsuit 3}, \ldots, \boxed{\spadesuit \mathrm{K}} \right\}$. De elementaire gebeurtenissen zijn dan de individuele kaarten die getrokken worden. Bijvoorbeeld $A = \left\{ \boxed{\clubsuit 5} \right\}$.

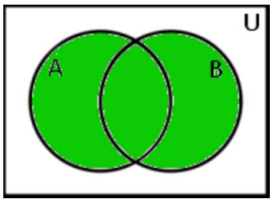
Bewerkingen met gebeurtenissen

Met gebeurtenissen kunnen we een aantal elementaire bewerkingen uitvoeren. We zullen dit illustreren aan de hand van het kaartspel. Het is ook eenvoudig om gebeurtenissen en bewerkingen met gebeurtenissen grafisch voor te stellen met behulp van Venndiagrammen.

De unie van twee gebeurtenissen

$$A \cup B = \left\{ x \in U \mid x \in A \vee x \in B \right\}$$

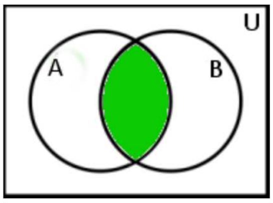
De unie van twee gebeurtenissen doet zich dus voor als een van beide gebeurtenissen zich voordoet (of allebei mag ook).



De doorsnede van twee gebeurtenissen

$$A \cap B = \left\{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \right\}$$

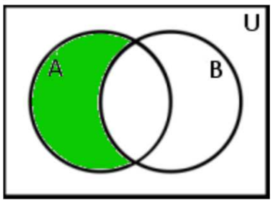
De doorsnede van twee gebeurtenissen doet zich enkel voor als beide gebeurtenissen zich voordoen.

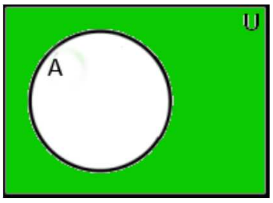


Het verschil van twee gebeurtenissen

$$A \setminus B = \left\{ x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B \right\}$$

Het verschil van twee gebeurtenissen doet zich enkel voor als de eerste gebeurtenis zich voordoet maar de tweede niet.





Het complement van een gebeurtenis

$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$

Het complement van een gebeurtenis doet zich enkel voor als de gebeurtenis zich niet voordoet.

Uit de definitie volgt onmiddellijk dat $A \cup \overline{A} = U$ en $A \cap \overline{A} = \varnothing$

Voorbeeld:

Noem bij het trekken van een kaart uit een kaartspel gebeurtenis A het trekken van een aas en gebeurtenis B het trekken van een hartenkaart. Als deelverzameling genoteerd geeft dit dan:

- $A = \{\boxed{\heartsuit 1}, \boxed{\diamondsuit 1}, \boxed{\clubsuit 1}, \boxed{\spadesuit 1}\}$
- $B = \{\boxed{\heartsuit 1}, \boxed{\heartsuit 2}, \boxed{\heartsuit 3}, \boxed{\heartsuit 4}, \boxed{\heartsuit 5}, \boxed{\heartsuit 6}, \boxed{\heartsuit 7}, \boxed{\heartsuit 8}, \boxed{\heartsuit 9}, \boxed{\heartsuit 10}, \boxed{\heartsuit J}, \boxed{\heartsuit Q}, \boxed{\heartsuit K}\}$

De unie is dan het trekken van een aas of een hartenkaart:

$$A \cup B = \{\boxed{\heartsuit 1}, \boxed{\diamondsuit 1}, \boxed{\clubsuit 1}, \boxed{\spadesuit 1}, \boxed{\heartsuit 2}, \boxed{\heartsuit 3}, \boxed{\heartsuit 4}, \boxed{\heartsuit 5}, \boxed{\heartsuit 6}, \boxed{\heartsuit 7}, \boxed{\heartsuit 8}, \boxed{\heartsuit 9}, \boxed{\heartsuit 10}, \boxed{\heartsuit J}, \boxed{\heartsuit Q}, \boxed{\heartsuit K}\}$$

De doorsnede is het trekken van hartenaas. Dit is tevens een elementaire gebeurtenis:

$$A \cap B = \{\boxed{\heartsuit 1}\}$$

Het verschil is het trekken van een aas die geen hartenkaart is:

$$A \setminus B = \{\boxed{\diamondsuit 1}, \boxed{\clubsuit 1}, \boxed{\spadesuit 1}\}$$

Empirische en theoretische kansen

In de realiteit maakt men onderscheid tussen **experimentele** en **theoretische** kansen. Theoretische kansen kan je (in principe) uitrekenen. Experimentele kansen kun je te weten komen door experimenten uit te voeren of door het verzamelen van statistisch materiaal. Een experimentele kans is dus de relatieve frequentie van het optreden van een gebeurtenis bij een bepaald experiment.

Voorbeeld:

De theoretische kans om met één dobbelsteen 6 te gooien is $1/6$. Als je echter 1000 keer met een zuivere dobbelsteen gooit kan best blijken dat je 182 keer een 6 gooit. De experimentele kans is dan de relatieve frequentie $^{182}/_{1000}$ = 0,182 (dit wordt ook wel de *empirische kans* genoemd). Hoe meer een experiment wordt herhaald, hoe dichter de empirische en de theoretische kans elkaar benaderen.

Formule van Laplace:

Uit de intuïtie volgt voor een kans de volgende formule: $kans\ P = \dfrac{aantal\ gunstige\ mogelijkheden}{totaal\ aantal\ mogelijkheden}$

Hierbij ga je er uiteraard van uit dat alle elementaire gebeurtenissen een gelijke kans hebben!! We noemen dit een uniforme kansverdeling.

Noteren we het aantal elementaire gebeurtenissen waaruit een gebeurtenis A bestaat met $\# A$ dan wordt de formule van Laplace: $P(A) = \dfrac{\# A}{\# U}$.

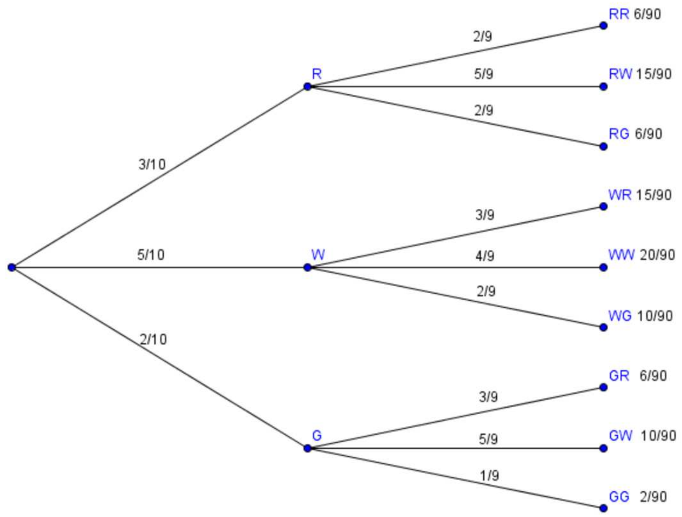
Op deze manier herleiden we het berekenen van een kans tot het oplossen van twee telproblemen.

Kansbomen

Eenvoudige problemen in de kansrekening kunnen vaak worden opgelost door gebruik te maken van een kansboom. We illustreren dit met een voorbeeld:

Voorbeeld: In een vaas zitten 3 rode, 5 witte en 2 gele knikkers. Je trekt blindelings uit deze vaas twee knikkers (zonder de eerste terug te leggen). Bereken de kans dat beide knikkers rood zijn.

De kansen bij deze oefening kan je eenvoudig voorstellen met een *kansboom*:



In verband met een kansboom onthouden we het volgende:

- De som van de kansen die uit een zelfde vertakkingspunt vertrekken, is altijd 1.
- Wanneer we verder gaan langs één tak, moeten we de kansen vermenigvuldigen.
- Wanneer verschillende takken gunstig zijn, moeten we de relevante kansen optellen.

(Zo is bijvoorbeeld de kans op 2 gelijke knikkers bij deze probleemstelling 6/90 + 20/90 + 2/90 = 28/90).

b) De wetten van de kansrekening

In het vorige hoofdstuk werd er nogal intuïtief omgegaan met kansrekening. Deze benadering is juist maar in de wiskunde vragen we toch om een nauwkeurigere beschrijving van deze regels. We vertrekken hierbij van een aantal axioma's waaruit we dan weer andere regels kunnen afleiden.

De axioma's van Kolmogorov

Met behulp van de volgende drie axioma's bouwen we ons hele systeem op:

- Axioma $\boxed{A1}$: $\forall A \subset U : P(A) \geq 0$
- Axioma $\boxed{A2}$: $P(U) = 1$
- Axioma $\boxed{A3}$: $\forall A, B \subset U:\ A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Complementaire kansen

Stelling (de complementregel) $\boxed{CR}$: $\forall A \subset U : P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Bewijs: Enerzijds weten we dat $P(A \cup \overline{A}) \overset{def}{=} P(U) \overset{\boxed{A2}}{=} 1$.

Anderzijds is $A \cap \overline{A} \overset{def}{=} \varnothing$, zodat $P(A \cup \overline{A}) \overset{\boxed{A3}}{=} P(A) + P(\overline{A})$.

Dus $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \ \Leftrightarrow\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ □

Gevolg 1 (de kans op de onmogelijke gebeurtenis) $\boxed{P0}$: $P(\varnothing)=0$

Bewijs: Aangezien $\overline{U}=\varnothing$ geldt $P(\varnothing)=P(\overline{U})\overset{\boxed{CR}}{=}1-P(U)\overset{\boxed{A2}}{=}1-1=0$ □

Gevolg 2 (kansgrenzen) $\boxed{KG}$: $\forall A\subset U: 0\le P(A)\le 1$

Bewijs: We weten we dat $P(A)\ge 0$ en $P(\overline{A})\ge 0$ (wegens $\boxed{A1}$). Dus geldt ook $P(A)\overset{\boxed{CR}}{=}1-P(\overline{A})\le 1$ □

De somregel

Stelling (de verschilregel) $\boxed{P-}$: $\forall A,B\subset U: P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$

Bewijs: Het is duidelijk dat voor de gebeurtenissen $A\setminus B$ en $A\cap B$ geldt:

$(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$ en $(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\varnothing$.

Dus $P(A)\overset{\boxed{A3}}{=}P(A\setminus B)+P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$ □

Stelling (de somregel) $\boxed{P+}$: $\forall A,B\subset U: P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Bewijs: Het is duidelijk dat voor de gebeurtenissen $A\setminus B$ en B geldt:

$(A\setminus B)\cup B=A\cup B$ en $(A\setminus B)\cap B=\varnothing$.

Dus $P(A\cup B)\overset{\boxed{A3}}{=}P(A\setminus B)+P(B)\overset{\boxed{P-}}{=}P(A)-P(A\cap B)+P(B)$ □

(Deze stelling is een rechtstreekse uitbreiding van axioma $\boxed{A3}$ voor niet-disjuncte gebeurtenissen).

De wetten van De Morgan

Stelling (de wetten van De Morgan) $\boxed{DM}$: $P(\overline{A\cap B})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$ en $P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$

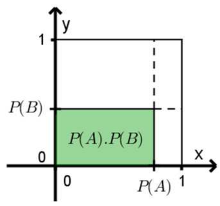
Bewijs: Op een Venndiagram is onmiddellijk duidelijk dat $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ en $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ □

Productregel (voor onafhankelijke gebeurtenissen)

Definitie: Twee gebeurtenissen worden onafhankelijk genoemd als het al dan niet voorkomen van de ene gebeurtenis geen invloed heeft op de kans op het voorkomen van de andere gebeurtenis.

Stelling (productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen $\boxed{P\times_o}$: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

Pseudobewijs: Dit is heel eenvoudig in te zien als je de kans in twee dimensies weergeeft. Zetten we $P(A)$ op de x-as en $P(B)$ op de y-as dan is meteen in te zien dat de kans op de doorsnede gegeven wordt door de oppervlakte van de rechthoek bepaald door de doorsnede van deze kansen. Dit is uiteraard $P(A)\cdot P(B)$. □



Voorbeeld: Je gooit twee keer na elkaar met een (eerlijke, 6-zijdige) dobbelsteen. Wat is de kans dat je de eerste keer meer dan 3 gooit, en de tweede keer meer dan 4?

De eerste worp heeft geen invloed op de tweede, de gebeurtenissen zijn dus duidelijk onafhankelijk. Dus:

$$P(D_1>3\ en\ D_2>4)=P(D_1>3)\cdot P(D_2>4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

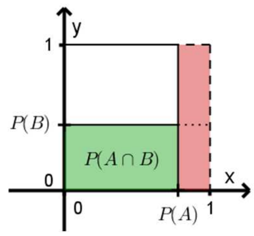
c) Voorwaardelijke kansen

Definitie van voorwaardelijke kans

Definitie: De kans op een gebeurtenis B als een gebeurtenis A zich heeft voorgedaan noemen we een voorwaardelijke kans die we noteren met $P(B \mid A)$.

Stelling $\boxed{VWK}$: Als $P(A) \neq 0$, dan geldt $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Pseudobewijs: We gebruiken dezelfde methode als bij de productwet voor onafhankelijke gebeurtenissen. Omdat we er nu van uitgaan dat gebeurtenis A zich heeft voorgedaan, valt het stuk van het vierkant waar A zich niet heeft voorgedaan weg (aangeduid in rood). De gezochte kans is dan de oppervlakte van de doorsnede $P(A \cap B)$ gedeeld door de oppervlakte van de rechthoek $P(A)$. □



De productwet

Stelling $\boxed{P\times}$: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ en $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit de formule voor voorwaardelijke kansen. □

Voorbeeld: Je neemt twee kaarten uit een kaartspel. Wat is de kans dat dit allebei hartenkaarten zijn?

$$P(K_1 = \heartsuit \cap K_2 = \heartsuit) = P(K_1 = \heartsuit) \cdot P(K_2 = \heartsuit \mid K_1 = \heartsuit) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$$

(Je kan dit natuurlijk ook gewoon berekenen met combinaties: $P(\heartsuit\heartsuit) = \dfrac{C_{13}^2}{C_{52}^2} = \dfrac{78}{1326} = \dfrac{1}{17}$)

De wet van de totale kans

Inleidend voorbeeld: Op maandag, woensdag en vrijdag moet Robbe de pyjama's wegleggen 's ochtends. De andere dagen moet Kato het doen. Robbe vergeet dit echter 40% van de tijd, Kato vergeet dit slechts 15% van de tijd. Papa komt op een werkdag thuis. Wat is de kans dat de pyjama's nog in de zetel liggen?

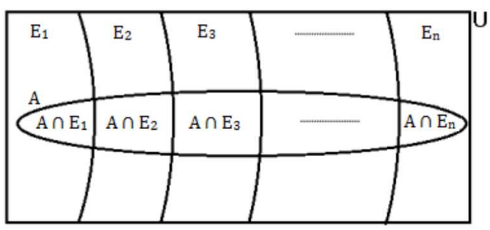
$$\begin{aligned} P(vergeten) &= P(vergeten \cap Robbe) + P(vergeten \cap Kato) \\ &= P(Robbe) \cdot P(vergeten \mid Robbe) + P(Kato) \cdot P(vergeten \mid Kato) \\ &= \frac{3}{5} \cdot 40\% + \frac{2}{5} \cdot 15\% = 30\% \end{aligned}$$

Stelling (wet van de totale kans) $\boxed{WTK}$: Als we een uitkomstenverzameling U kunnen opdelen in allemaal verschillende disjuncte gebeurtenissen $E_1, E_2, \ldots, E_n$, dan geldt voor elke gebeurtenis $A \subset U$ de wet van de totale kans: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \cdot P(A \mid E_i)$.

Bewijs: Uit het Venn diagram volgt onmiddellijk:

$$A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n)$$

$$\Leftrightarrow P(A) \overset{\boxed{A3}}{=} \sum_{i=1}^{n} A \cap E_i \overset{\boxed{P\times}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \cdot P(A \mid E_i) \quad □$$



De regel van Bayes

Inleidend voorbeeld (bis): Op maandag, woensdag en vrijdag moet Robbe de pyjama's wegleggen 's ochtends. De andere dagen moet Kato het doen. Robbe vergeet dit echter 40% van de tijd, Kato vergeet dit slechts 15% van de tijd. Papa komt op een werkdag thuis en ziet dat de pyjama's nog in de zetel liggen. Wat is de kans dat het eigenlijk aan Robbe was om ze weg te leggen?

$$\begin{aligned} P(Robbe \mid vergeten) &= \frac{P(Robbe \cap vergeten)}{P(vergeten)} \\ &= \frac{P(Robbe)\cdot P(vergeten \mid Robbe)}{P(Robbe)\cdot P(vergeten \mid Robbe) + P(Kato)\cdot P(vergeten \mid Kato)} \\ &= \frac{\frac{3}{5}\cdot 40\%}{\frac{3}{5}\cdot 40\% + \frac{2}{5}\cdot 15\%} = \frac{24\%}{30\%} = 80\% \end{aligned}$$

Stelling (de regel van Bayes) $\boxed{RvB}$: Als we een uitkomstenverzameling U kunnen opdelen in allemaal verschillende disjuncte gebeurtenissen $E_1, E_2, ..., E_n$, dan geldt voor elke niet-lege gebeurtenis $A \subset U$ de regel van Bayes: $P(E_k \mid A) = \dfrac{P(E_k)\cdot P(A \mid E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\cdot P(A \mid E_i)}$.

Bewijs: $P(E_k \mid A) = \dfrac{P(E_k \cap A)}{P(A)} \overset{\boxed{P\times}}{\underset{\boxed{WTK}}{=}} \dfrac{P(E_k)\cdot P(A \mid E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\cdot P(A \mid E_i)}$ □

Onafhankelijkheid van gebeurtenissen

Gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk als en slechts als $P(A \mid B) = P(A)$ en $P(B \mid A) = P(B)$ of anders gezegd (met $\boxed{P\times}$) als en slechts als $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$.