Integraalrekening

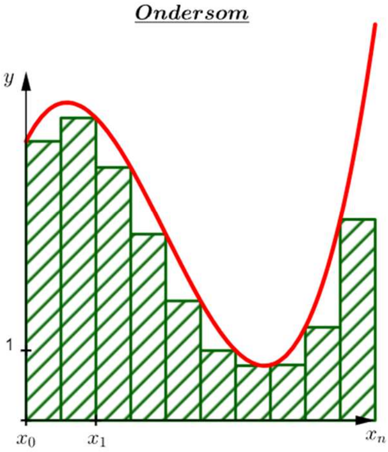
Georg Friedrich Bernhard Riemann
° Breselenz 17 september 1826
✝ Selasca 20 juni 1866

Henri Léon Lebesgue
°Beauvais 28 juni 1875
✝ Parijs 26 juli 1941

In de wiskundige analyse geeft de integraal van een positieve functie een nauwkeurige betekenis aan het begrip "oppervlakte onder de kromme". Het eenvoudigste integraalbegrip is gebaseerd op de formulering van Bernhard Riemann en wordt daarom soms Riemann-integraal genoemd.

De Lebesgue-integraal, genoemd naar zijn bedenker Henri Lebesgue, is een constructie die een grotere klasse van functies integreerbaar maakt; hij kan bovendien worden gebruikt over andere domeinen dan de reële getallen.

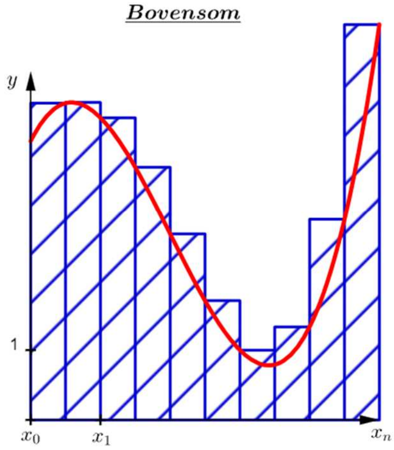
Ondersom



$$s_{10} = 11.56$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x \ ,$$
$$\forall i : f(x_i^*) = \inf f([x_{i-1}, x_i])$$

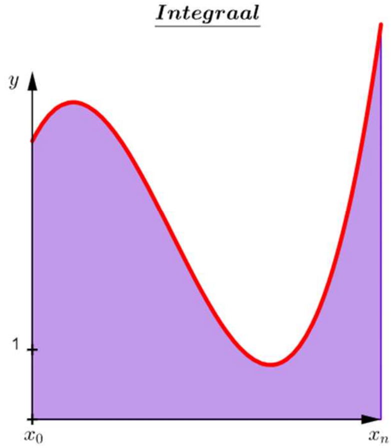
Bovensom



$$S_{10} = 16.15$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x \ ,$$
$$\forall i : f(x_i^*) = \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

Integraal

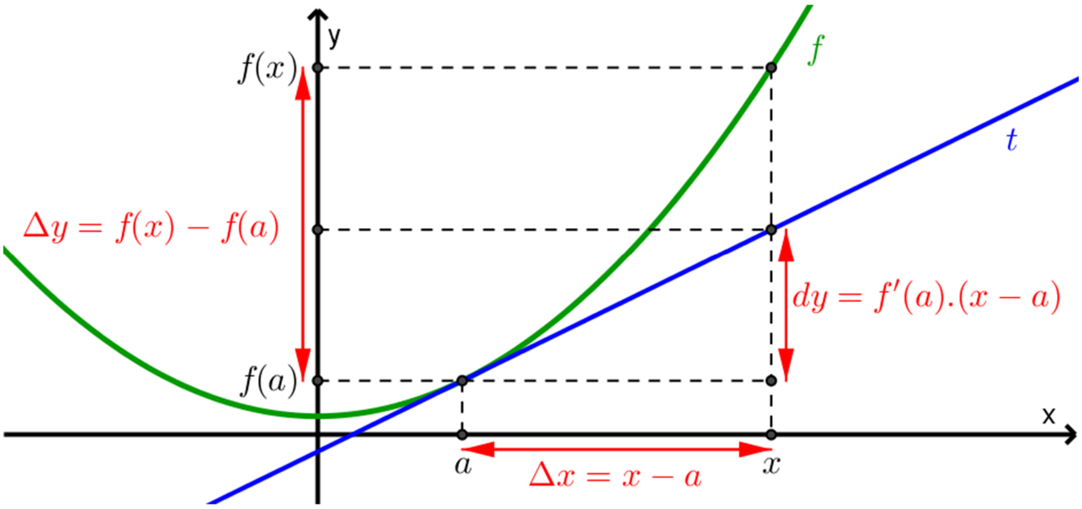


$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = 13.75$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x \ ,$$
$$\forall i : x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

1) De differentiaal

Je ziet de grafiek van een afleidbare functie f samen met haar raaklijn t in punt $(a, f(a))$.



Voor een veranderlijk punt $x \neq a$ definiëren we dan $\Delta x = x - a$ en $\Delta y = f(x) - f(a)$. We noemen dan $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ het differentiequotiënt en weten dat $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ de afgeleide van f is in a.

De vergelijking van de raaklijn is dan $t \leftrightarrow y = f'(a).(x-a) + f(a)$.

Op de figuur zien we dat $dy = f'(a).(x-a)$ een benadering is voor Δy. Hoe kleiner Δx (dus hoe dichter x bij a ligt), hoe beter de benadering. We noemen dy *de differentiaal* van functie f in a.

Algemeen definiëren we dus in een willekeurig punt x: $dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$.

Voor de identieke functie $f(x) = x$ geldt dan $df(x) = dx = 1.\Delta x = \Delta x$. Op deze manier kunnen we de definitie dan herschrijven als $dy = df(x) = f'(x) \cdot dx$

Deze formule verduidelijkt ook de notatie van Leibniz: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Het is zo ook meteen duidelijk dat een functie differentieerbaar is als ze afleidbaar is.

Alle rekenregels en formules die we kennen van bij afgeleiden worden dus eenvoudig overgedragen naar rekenregels en formules van differentiëren.

Voorbeeld: $d(\text{Bgsin } 5x) = \frac{5\,dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

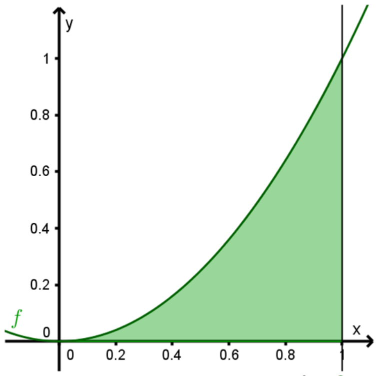
Toepassing: Benader $\sqrt{106}$ met behulp van differentiëren.

Noem $f(x) = \sqrt{x}$, dan is $f(x) = f(a) + \Delta y \approx f(a) + dy = f(a) + f'(a).(x-a)$

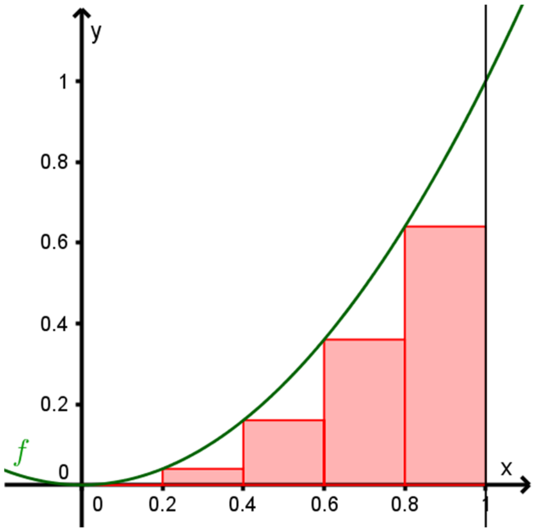
Neem $x = 106$ en $a = 100$, dan is $x - a = 6$, $f(a) = 10$ en $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0{,}05$, zodat we krijgen: $\sqrt{106} \approx 10 + 0{,}05.6 = 10{,}3$. *(Terwijl met onze GRM blijkt dat* $\sqrt{106} \approx 10{,}29563$ *).*

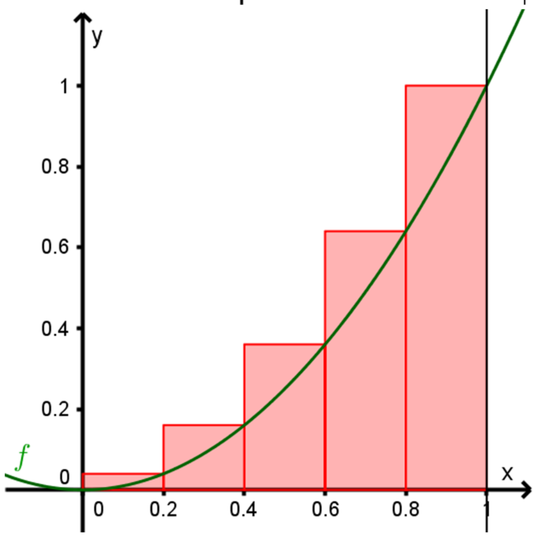
2) Bepaalde integralen

a) Ondersommen en bovensommen



Stel: er wordt ons gevraagd de oppervlakte S te berekenen tussen de grafiek van de functie $f\left(x\right)=x^2$, de x-as en de verticale rechte $x=1$. Het is duidelijk dat de zo ontstane figuur (nog) geen bekende figuur is waarvoor we oppervlakteformules kennen en kunnen gebruiken. We kunnen deze oppervlakte wel benaderen door rechthoekjes te gebruiken.





We verdelen de basis van de figuur in 5 gelijke stukken, en nemen dit als breedtes van onze rechthoeken. Op de linkerfiguur nemen we als hoogte telkens de kleinste functiewaarde in het interval, op de rechterfiguur telkens de grootste functiewaarde.

Zo krijgen we links als benadering: $s_5 = 0,2.0 + 0,2.0,04 + 0,2.0,16 + 0,2.0,36 + 0,2.0,64 = 0,24$.

De methode die we links gebruikten zal duidelijk altijd te klein zijn. We noemen het een *ondersom* voor de functie en noteren ze met kleine letter s_5 (met als index het aantal rechthoekjes).

We krijgen rechts als benadering: $S_5 = 0,2.0,04 + 0,2.0,16 + 0,2.0,36 + 0,2.0,64 + 0,2.1 = 0,44$.

De methode die we rechts gebruikten zal duidelijk altijd te groot zijn. We noemen het een *bovensom* voor de functie en noteren ze met grote letter S_5 (met als index het aantal rechthoekjes).

Het gemiddelde van deze twee geeft een zeer goede benadering van de gezochte oppervlakte. We schatten dus $S = \dfrac{s_5 + S_5}{2} = \dfrac{0,24 + 0,44}{2} = 0,34$. (De werkelijke oppervlakte blijkt $\dfrac{1}{3}$ te zijn).

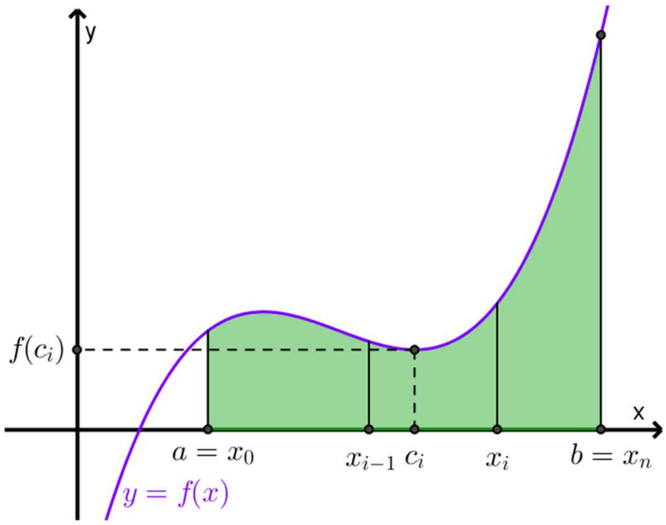
We kunnen deze redenering herhalen voor meer rechthoekjes. Het is duidelijk dat hoe meer rechthoekjes n we nemen, hoe dichter de ondersom en bovensom bij elkaar zullen liggen. Meer nog, we kunnen stellen dat voor deze functie in dat interval geldt dat $S = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Het mag ook duidelijk zijn dat dit ook werkt als we per interval willekeurige functiewaarden nemen (dus niet consequent het minimum of het maximum nemen). We krijgen dan een benadering voor de oppervlakte die tussen de ondersom en de bovensom ligt en dus in de limiet voor $n \to +\infty$ ook gelijk is aan de gezochte oppervlakte.

b) Algemene werkwijze – de bepaalde integraal

Om de oppervlakte te berekenen begrepen tussen de grafiek van een functie, de x-as en twee verticale rechten $x=a$ en $x=b$, verdelen we het interval $[a,b]$ in n gelijke deelintervallen: $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ..., $[x_{i-1},x_i]$, ..., $[x_{n-1},b]$.

In elk interval benaderen we de oppervlakte door de breedte van het interval Δx te vermenigvuldigen met een willekeurig gekozen functiewaarde $f(c_i)$, met $c_i\in[x_{i-1},x_i]$.



De breedte van deze n deelintervallen is dan gelijk aan $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$.

De gezochte oppervlakte wordt dan benaderd door: $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x$.

Men kan bewijzen dat voor functies die continu zijn in $[a,b]$ de limiet voor $n\to+\infty$ van S_n bestaat en dus gelijk is aan de werkelijke gezochte oppervlakte. We noemen deze limiet de bepaalde integraal van a tot b van de functie f. We noteren dit als:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_a^b f(x).dx$$

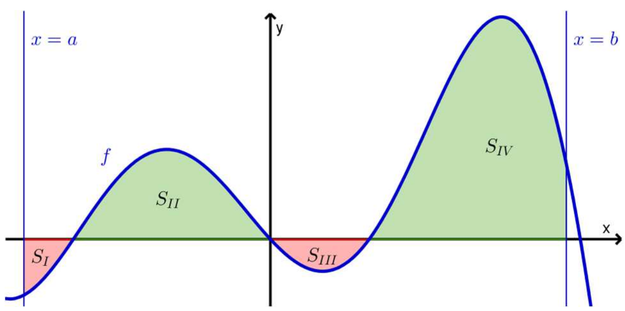
Meer algemeen noemen we functies waarvoor deze limiet bestaat *integreerbaar* over dat interval.

c) Georiënteerde oppervlakte

Tot hiertoe gingen we er stilzwijgend van uit dat de grafiek van de functie f volledig boven de x-as lag in het gegeven interval $[a,b]$ (dus $\forall x\in[a,b]: f(x)\geq 0$). De oppervlakte die we via de algemene werkwijze bekomen is dan uiteraard positief.

Zou je deze werkwijze herhalen voor een functie die onder de x-as ligt in $[a,b]$ dan kom je een negatieve oppervlakte uit. We spreken dus logischerwijze af dat oppervlaktes boven de x-as positief gerekend worden, en oppervlaktes onder de x-as negatief. Dat dit nuttig en realistisch is volgt later uit enkele fysische voorbeelden.

We interpreteren algemeen de bepaalde integraal van een (continue) functie f van a tot b dan ook als de som van de georiënteerde oppervlakten tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x=a$ en $x=b$.



Zo geldt in het getekende voorbeeld: $\int_a^b f(x)dx=-S_I+S_{II}-S_{III}+S_{IV}$.

Aanvulling op de definitie van bepaalde integraal:

We namen tot hiertoe altijd a als ondergrens en b als bovengrens om te integreren, waarbij $a<b$. We kunnen de definitie van bepaalde integraal verder uitbreiden:

- Als $a=b$, dan stellen we $\int_a^a f(x)dx=0$
- Als $a>b$, dan stellen we $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

d) Eigenschappen van de bepaalde integraal

Uit de definitie van de bepaalde integraal volgen onmiddellijk de volgende eigenschappen:

Eigenschap ①: optelbaarheid van de bepaalde integraal

Als f een integreerbare functie is in het interval $[p,q]$, dan geldt voor alle $a,b,c\in[p,q]$ dat:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

Eigenschap ②: lineariteit van de bepaalde integraal

Als f en g integreerbaar zijn in het interval $[a,b]$, dan is ook de functie $r.f+s.g$ ($r,s\in\mathbb{R}$) daar integreerbaar, en voor de bepaalde integraal geldt:

$$\int_a^b \left(r.f(x)+s.g(x)\right)dx=r.\int_a^b f(x)dx+s.\int_a^b g(x)dx$$

In het bijzonder gelden de eigenschappen:

- $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \left(r.f(x)\right)dx=r.\int_a^b f(x)dx$

Eigenschap ③: ongelijkheidseigenschap

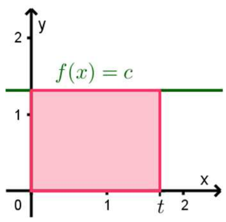
Als f en g integreerbaar zijn in het interval $[a,b]$, dan geldt:

$$\forall x\in[a,b]: f(x)\geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$$

Merk op dat deze eigenschap zeker **niet** geldt in de omgekeerde richting!

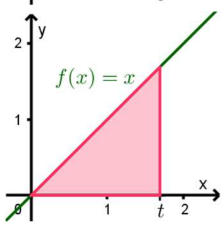
e) Integralen van veeltermfuncties

Integraal van een constante functie



De bepaalde integraal $\int_0^t c\,dx$, met $c\in\mathbb{R}_0^+$ is de oppervlakte van een rechthoek met basis t en hoogte c, zodat $\int_0^t c\,dx=c\cdot t$.

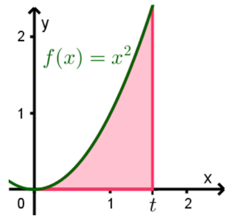
Integraal van de identieke functie



De bepaalde integraal $\int_0^t x\,dx$, is de oppervlakte van een driehoek met basis t en hoogte t, zodat $\int_0^t x\,dx=\frac{t\cdot t}{2}=\frac{t^2}{2}$.

Integraal van de kwadratische functie

De bepaalde integraal $\int_0^t x^2\ dx$, is geen gekende oppervlakte.



We gebruiken de definitie uit de voorgaande paragrafen:

(verdeel het interval $[0,t]$ in n deelintervallen met breedte $\Delta x = t/n$ en kies c als de rechtergrens van het interval, dus $c_i = it/n$, zodat $f(c_i) = i^2t^2/n^2$)

$$\int_0^t f(x).dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^n f(c_i).\Delta x\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^n \frac{i^2t^2}{n^2}\cdot\frac{t}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sum_{i=1}^n i^2\right)\cdot t^3}{n^3}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)(2n+1)\cdot t^3}{n^3} = \frac{t^3}{3}$$ (de limiet is het quotiënt van de hoogstegraadstermen)

(* Bewijs als oefening met inductie dat $\sum_{i=1}^n i^2 = 1+4+9+16+...+n^2 = \frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)$)

Integraal van veeltermfuncties

We bewezen hierboven dat $\int_0^t x^0 dx = \int_0^t 1\cdot dx = t$, $\int_0^t x^1 dx = \int_0^t x\cdot dx = \frac{t^2}{2}$ en $\int_0^t x^2 dx = \frac{t^3}{3}$.

Met behulp van de optelbaarheid van de bepaalde integraal leiden we hier ook onmiddellijk uit af dat:

$\int_a^b x^0 dx = \int_a^0 1\cdot dx + \int_0^b 1\cdot dx = -\int_0^a 1\cdot dx + \int_0^b 1\cdot dx = -a+b = b-a$, en analoog

$\int_a^b x^1 dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ en $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

Het lijkt dus redelijk om aan te nemen dat $\int_0^t x^n dx = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ en $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$ (met $n\in\mathbb{N}$).

We bewijzen deze eigenschap later nog.

Met behulp van de lineariteit van bepaalde integralen kunnen we nu dus veeltermfuncties integreren:

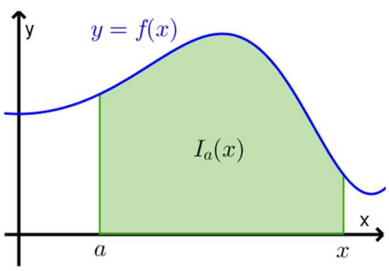
$$\int_a^b\left(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0\right)dx = c_n\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{b^n-a^n}{n} + ... + c_1\frac{b^2-a^2}{2} + c_0(b-a).$$

f) De hoofdstelling van de integraalrekening

We tonen in deze paragraaf aan dat integreren in zekere zin de omgekeerde operatie is van differentiëren.

Integraalfuncties

We noemen de functie I_a, met $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$, de integraalfunctie van f met ondergrens a. Ze stelt dus de veranderlijke georiënteerde oppervlakte voor begrepen tussen de x-as en de grafiek van de functie f in het interval met veranderlijke bovengrens $[a,x]$.

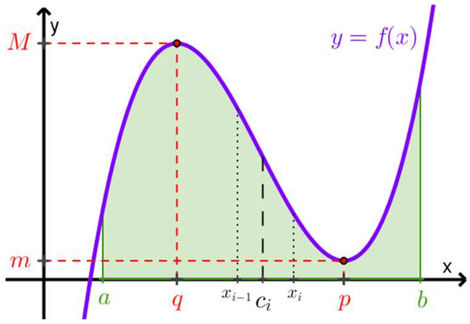


De middelwaardestelling van de integraalrekening

Stelling: Is f continu in $[a,b]$, dan bestaat er een $c \in [a,b]$ zodat: $\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$

Bewijs: Omdat f continu is in $[a,b]$ bestaat er een kleinste en een grootste functiewaarde in dat interval, die we zullen aanduiden met m en M .

We volgen de algemene werkwijze voor het berekenen van een bepaalde integraal en verdelen het interval in n gelijke deelintervallen met breedte $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. In elk van deze intervallen $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ..., $[x_{i-1},x_i]$, ... , $[x_{n-1},b]$, nemen we een $c_i \in [x_{i-1},x_i]$.



Dan krijgen we achtereenvolgens:

	$m \le f(c_i) \le M$ *(in elk deelinterval)*	(alle functiewaarden liggen tussen m en M)
$\Rightarrow$	$m.\Delta x \le f(c_i).\Delta x \le M.\Delta x$ *(in elk deelinterval)*	(alles vermenigvuldigen met $\Delta x > 0$)
$\Rightarrow$	$n.m.\Delta x \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x \le n.M.\Delta x$	(sommeren over alle deelintervallen)
$\Rightarrow$	$(b-a).m \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x \le (b-a).M$	($\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \Leftrightarrow n.\Delta x = b-a$)
$\Rightarrow$	$(b-a).m \le \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x \le (b-a).M$	(de limiet nemen voor $n \to +\infty$)
$\Rightarrow$	$(b-a).m \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a).M$	(definitie van de bepaalde integraal)
$\Rightarrow$	$m \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$	(alles delen door $b-a>0$)

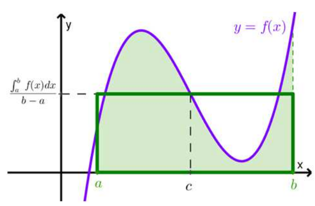
Omdat f continu is in $[a,b]$ bestaan er volgens de stelling van Weierstrass twee getallen $p,q \in [a,b]$ zodat $f(p)=m$ en $f(q)=M$ (zie figuur). De tussenwaardestelling leert ons dan dat alle functiewaarden tussen m en M door minstens één x-waarde c tussen p en q bereikt worden. Omdat c tussen p en q ligt zal het bij uitbreiding uiteraard ook in $[a,b]$ liggen.

Er bestaat dus minstens één $c \in [a,b]$, zodat $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$.

Opmerking: de functiewaarde $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ is de gemiddelde functiewaarde in dat interval.

Meetkundige interpretatie:

We kunnen $f(c)$ ook interpreteren als de hoogte van de rechthoek met als basis het interval $[a,b]$ op de x-as waarvan de (georiënteerde) oppervlakte gelijk is aan de (georiënteerde) oppervlakte tussen de grafiek van de functie en de x-as.



De hoofdstelling van de integraalrekening

Stelling: Als f continu is in $[a,b]$, dan geldt in $[a,b]$ dat $D\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$.

Bewijs: Met integraalfuncties kunnen we dit herschrijven als: $\forall x \in [a,b]: I_a'(x) = f(x)$

$$I_a'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{I_a(x+\Delta x) - I_a(x)}{\Delta x} \quad \text{(definitie van afgeleide)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} \quad \text{(definitie van integraalfunctie)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt}{\Delta x} \quad \text{(integraalgrenzen verwisselen)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \quad \text{(optelbaarheid van de bepaalde integraal)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}.f(c)}{\cancel{\Delta x}}, \text{ met } c \in [x, x+\Delta x] \quad \text{(middelwaardestelling)}$$

$$= f(x) \quad \square \quad \text{(als } \Delta x \to 0\text{, dan is } x = c = x + \Delta x\text{)}$$

Primitieve functies

We noemen F een primitieve functie van f als en slechts als $DF = f$.

Het is duidelijk dat alle integraalfuncties van een functie ook primitieve functies zijn van die functie. Het omgekeerde is echter niet noodzakelijk waar.

Voorbeeld: Als $f(x) = 5x^4$ dan zijn $F_1(x) = x^5 + 2$ en $F_2(x) = x^5 - 4$ primitieve functies van f.

Stelling: Twee primitieve functies van eenzelfde functie verschillen slechts een constante van elkaar.

Bewijs: Stel dat F_1 en F_2 beide primitieve functies zijn van f, dan is zowel $DF_1 = f$ als $DF_2 = f$.

Dus $DF_1 = DF_2 \Leftrightarrow DF_1 - DF_2 = 0 \Leftrightarrow D(F_1 - F_2) = 0 \Leftrightarrow F_1 - F_2 = C$, met $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Integreren met behulp van primitieve functies

Stelling: Als F een primitieve is van f (continu in $[a,b]$), dan is $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Bewijs: We bewezen reeds dat elke integraalfunctie $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ een primitieve is van f. Uit de stelling in verband met primitieve functies volgt dan dat $I_a(x) - F(x) = C$, of dus nog dat $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$.

Stel je hierin $x = a$ dan wordt dit $\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = F(a) + C \Leftrightarrow C = -F(a)$

Neem je $x = b$, dan wordt het $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$ $\square$

Opmerking: Het verschil wordt ook vaak als volgt genoteerd: $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

We hebben nu eindelijk een praktische methode gevonden om bepaalde integralen te berekenen.

Voorbeeld 1: $\int_{-1}^{5} 5x^4 dx = \left[x^5\right]_{-1}^{5} = 5^5 - (-1)^5 = 3126$

Voorbeeld 2: $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

g) Typeproblemen

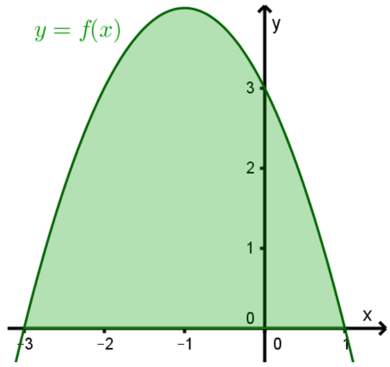
De oppervlakte onder een kromme berekenen

Voorbeeld: Bereken de oppervlakte begrepen tussen de parabool $p \leftrightarrow y = 3 - 2x - x^2$ en de x-as.

De nulpunten van de parabool zijn $(-3,0)$ en $(1,0)$. De gezochte oppervlakte wordt dus gegeven door:

$$S = \int_{-3}^{1} \left(3 - 2x - x^2\right) dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1}$$

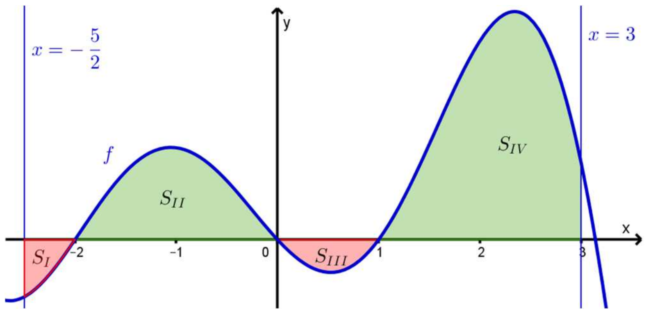
$$= \left(3.1 - 1^2 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(3.(-3) - (-3)^2 - \frac{(-3)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$



De oppervlakte tussen een kromme en de x-as berekenen tussen twee waarden

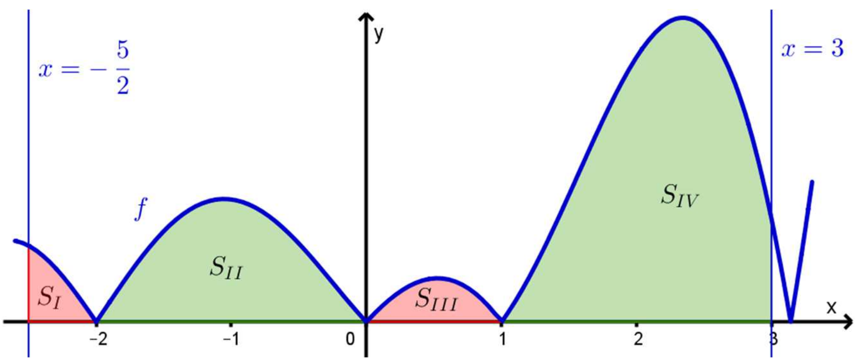
We zagen al dat een bepaalde integraal de georiënteerde oppervlakte berekent tussen twee grenzen.

Als je de werkelijke oppervlakte wil berekenen kan je deze redenering omkeren door het integratie-interval in stukken te verdelen waar het teken van de functie niet verandert. Zo geldt voor de werkelijke oppervlakte S begrepen tussen de x-as en de grafiek van de functie tussen $x = -2{,}5$ en $x = 3$:

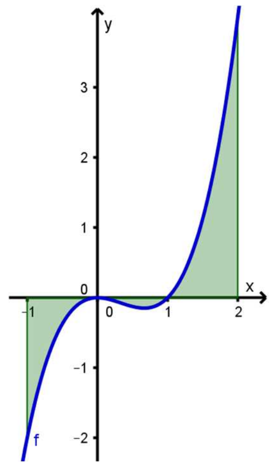


$$S = S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV} = -\int_{-\frac{5}{2}}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx .$$

Als je integreert met je rekenmachine kan dit sneller door gewoon $S = \int_{-\frac{5}{2}}^{3} |f(x)| dx$ te berekenen:



Voorbeeld: bereken de (werkelijke) oppervlakte begrepen tussen de x-as en de grafiek van de functie $f(x)=x^3-x^2$ over het interval $[-1,2]$.



We bekijken eerst het tekenverloop:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3-x^2		-	0	-	0	+	

De functie is dus over het te integreren interval zowel negatief als positief.
De gezochte oppervlakte is dus:

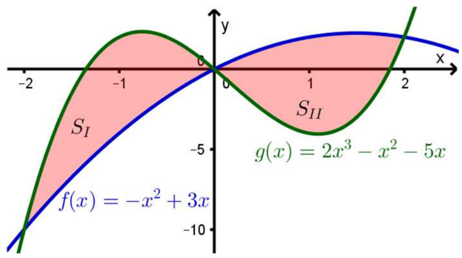
$$\begin{aligned} opp\ G &= -\int_{-1}^{1}\left(x^3-x^2\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^3-x^2\right)dx=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} \\ &= -\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{12}=\frac{25}{12} \end{aligned}$$

De oppervlakte tussen twee krommen berekenen

Ook dit is een eenvoudig probleem als je beseft dat de (georiënteerde) oppervlakte tussen twee krommen kan berekend worden door het verschil van beide functies te integreren.

Als je de werkelijke oppervlakte wil berekenen moet je ervoor zorgen dat de verschilfunctie positief is (dus dat je in je integrandum de onderste functie van de bovenste functie aftrekt).

Voorbeeld: De grafieken van de functies $f(x)=-x^2+3x$ en $g(x)=2x^3-x^2-5x$ sluiten twee gebieden S_I en S_{II} in zoals afgebeeld op de grafiek. Bewijs dat $S_I=S_{II}$.



We bekijken eerst het tekenverloop van de verschilfunctie $v(x)=g(x)-f(x)=2x^3-8x$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$2x^3-8x$		-	0	+	0	-	0	+	

Dus $S_I=\int_{-2}^{0}\left(2x^3-8x\right)dx=\left[\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_{-2}^{0}=0-\left(\frac{(-2)^4}{2}-4(-2)^2\right)=8$

En $S_{II}=-\int_{0}^{2}\left(2x^3-8x\right)dx=-\left[\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_{0}^{2}=-\left(\frac{2^4}{2}-4.2^2\right)=8$, zodat inderdaad $S_I=S_{II}$.

h) Oneigenlijke integralen

Oneigenlijke integralen van de eerste soort

Een oneigenlijke integraal van de eerste soort is een integraal waarbij één van de integratiegrenzen (of beide) naar $+\infty$ of $-\infty$ nadert.

Per definitie bereken je deze integralen als volgt:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \text{ , } \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \text{ en } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx .$$

Voorbeeld: $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{k}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{-1}{b}+1\right)=1$

Oneigenlijke integralen van de tweede soort

Een oneigenlijke integraal van de tweede soort is de een integraal waarbij een van de grenzen een punt is waarin het integrandum niet gedefinieerd is.

Deze integralen bereken je als volgt:

Als $c \notin dom\ f : \int_{c}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to c\\ >}}\int_{a}^{b} f(x)dx$ en $\int_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to c\\ <}}\int_{a}^{b} f(x)dx$

Voorbeeld: $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\substack{k\to 0\\ >}}\int_{k}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\substack{k\to 0\\ >}}\left[2\sqrt{x}\right]_k^1 = \lim_{\substack{k\to 0\\ >}}\left(2-2\sqrt{k}\right)=2$

Ook als het integrandum niet gedefinieerd is in een inwendig punt $c \in \left]a,b\right[$ van het integratie-interval spreken we van een oneigenlijke integraal van de tweede soort. Dan geldt:

Als $c \notin dom\ f : \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{k\to c\\ <}}\int_{a}^{k} f(x)dx + \lim_{\substack{k\to c\\ >}}\int_{k}^{b} f(x)dx$

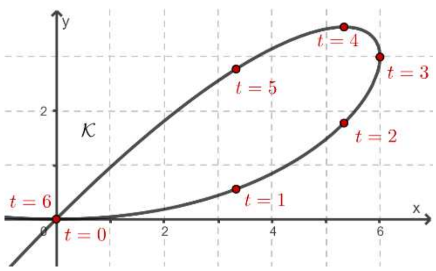
Voorbeeld: $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{\substack{k\to 0\\ <}}\int_{-1}^{k}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx + \lim_{\substack{k\to 0\\ >}}\int_{k}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{\substack{k\to 0\\ <}}\left[3\sqrt[3]{x}\right]_{-1}^{k} + \lim_{\substack{k\to 0\\ >}}\left[3\sqrt[3]{x}\right]_{k}^{1}$

$$= \lim_{\substack{k\to 0\\ <}}\left(3\sqrt[3]{k}+3\right) + \lim_{\substack{k\to 0\\ >}}\left(3-3\sqrt[3]{k}\right) = 6$$

i) Parameterkrommen integreren

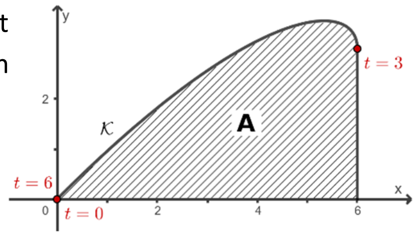
Bij het integreren van parameterkrommen verandert er eigenlijk niets. Enkel moet je je grenzen berekenen in functie van t en in je integrandum dx schrijven als $\frac{dx(t)}{dt}dt = x'(t)dt$ of eventueel als je in verticale richting integreert $\frac{dy(t)}{dt}dt = y'(t)dt$.

Voorbeeld: Gegeven is kromme $\mathcal{K} \leftrightarrow \begin{cases} x(t) = -\frac{2t^2}{3}+4t \\ y(t) = -\frac{t^3}{9}+\frac{2t^2}{3} \end{cases}$, met $t \in \mathbb{R}$.



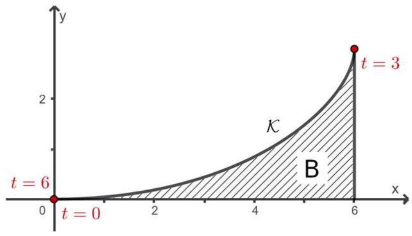
Deze kromme snijdt zichzelf in de oorsprong als $t=0$ en $t=6$. Voor waarden in het interval $t \in [0,6]$ beschrijft deze kromme dus een lus. We bereken de oppervlakte van deze lus.

Als het om gewone functies ging zouden we het onderste stuk (B) van het volledige stuk (A) aftrekken om de gezochte oppervlakte te vinden. We doen nu net hetzelfde maar zetten alles om in functie van parameter t:



$$A_A = \int_{x=0}^{x=6} y\,dx = \int_{t=6}^{t=3} y(t)x'(t)\,dt = \int_6^3 \left(-\frac{t^3}{9}+\frac{2t^2}{3}\right)\left(-\frac{4t}{3}+4\right)dt \overset{\boxed{GRM}}{=} \frac{69}{5}$$

$$A_B = \int_{x=0}^{x=6} y\,dx = \int_{t=0}^{t=3} y(t)x'(t)\,dt = \int_0^3 \left(-\frac{t^3}{9}+\frac{2t^2}{3}\right)\left(-\frac{4t}{3}+4\right)dt \overset{\boxed{GRM}}{=} \frac{21}{5}$$

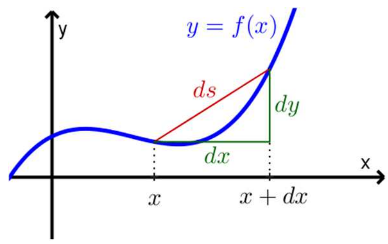


De gezochte oppervlakte is dus $A = A_A - A_B = \dfrac{48}{5}$.

j) De booglengte van een kromme berekenen

Stelling: De booglengte van de grafiek van de functie f die afleidbaar is in $[a,b]$ wordt gegeven door de formule $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Bewijs: In het interval $[x, x+dx]$ kan de booglengte ds van de grafiek van een (continue) functie f benaderd worden door $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$, of dus nog $ds = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ (zie figuur).



Is de functie f bovendien afleidbaar, dan kunnen we de limiet $dx \to 0$ nemen en wordt de booglengte van de grafiek in een interval $[a,b]$ gegeven door $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. □

Opmerking: Als de kromme gegeven is met een parametervoorstelling met $x(t)$ en $y(t)$ afleidbare functies in een interval $[t_1, t_2]$, dan wordt de lengte L van de kromme in dat interval gegeven door:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

Voorbeeld: De lengte van de lus van kromme $\mathcal{K}$ uit de vorige paragraaf kunnen we bereken als volgt:

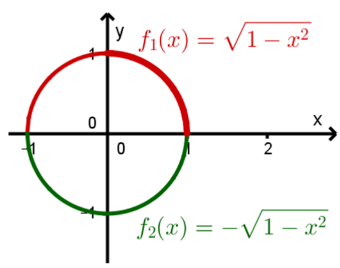
$$L = \int_0^6 \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt = \int_0^6 \sqrt{\left(-\frac{4t}{3}+4\right)^2+\left(-\frac{t^2}{3}+\frac{4t}{3}\right)^2}\,dt \overset{\boxed{GRM}}{\approx} 14{,}685$$

Merk op dat de integralen voor de oppervlakte eenvoudige veeltermintegralen zijn (we berekenen ze hier snel met onze GRM om tijd te besparen), maar de integraal voor de booglengte is een integraal die ver buiten het bestek van deze cursus valt (hij is zelfs niet te berekenen via elementaire primitieve functies).

Voorbeeld: de cirkel

We bereken de omtrek van de (goniometrische) cirkel $c \leftrightarrow x^2+y^2=1$.

De vergelijking valt dus uiteen in twee functies $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ en $f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$.



De omtrek is dan vier maal de booglengte van f_1 in het interval $[0,1]$.

De afgeleide is $f_1'(x)=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$, dus de omtrek van de cirkel wordt gegeven door:

$$L=4\cdot\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=4\cdot\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=4\left[\operatorname{Bgsin} x\right]_0^1=4\cdot(\underbrace{\operatorname{Bgsin} 1}_{=\pi/2}-\underbrace{\operatorname{Bgsin} 0}_{=0})=2\pi$$

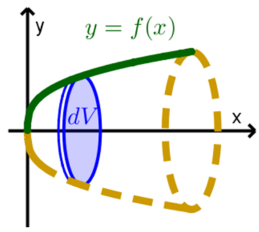
De omtrek van een cirkel met straal r is dan r keer groter, zo krijgen we de bekende formule $P_{\bigcirc}=2\pi r$.

k) Omwentelingslichamen

Een omwentelingslichaam is een ruimtefiguur die ontstaat door een vlakke kromme te wentelen om een rechte. Met behulp van integralen kunnen we zowel de inhoud als de manteloppervlakte van omwentelingslichamen berekenen.

Inhoud van een omwentelingslichaam

Stelling: De inhoud van het omwentelingslichaam, verkregen door de grafiek van de continue functie f in het interval $[a,b]$ te wentelen om de x-as, wordt gegeven door de formule $V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx$.

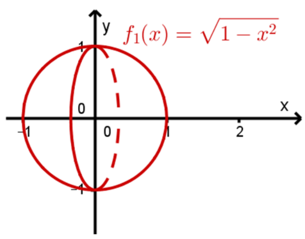


Bewijs: In elk interval $[x,x+dx]$ kunnen we het volume dV dat we zo verkrijgen benaderen door de inhoud van een cilinder met dikte dx en straal $f(x)$. We krijgen dan $dV=\pi\left(f(x)\right)^2dx$. Nemen we de som van al deze deelvolumes, en daarna de limiet $dx\to 0$, dan wordt de inhoud van het omwentelingslichaam, verkregen door de grafiek van f in het interval $[a,b]$ te wentelen om de x-as, gegeven door $V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx$. □

Opmerking: Als de kromme gegeven is met een parametervoorstelling met $x(t)$ en $y(t)$ afleidbare functies in een interval $[t_1,t_2]$, dan wordt het volume van het omwentelingslichaam V verkregen door de kromme in dat interval te wentelen om de x-as gegeven door:

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2dx=\pi\int_{t_1}^{t_2}\left(y(t)\right)^2\frac{dx}{dt}dt=\pi\int_{t_1}^{t_2}\left(y(t)\right)^2x'(t)\,dt$$

Voorbeeld: de bol



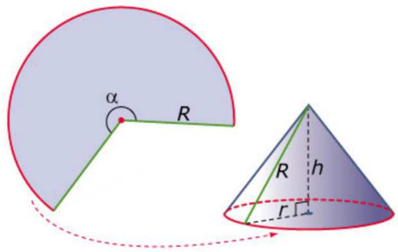
We bereken de inhoud van de bol met straal 1, die we verkrijgen door de grafiek van de functie $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ in haar domein te wentelen om de x-as.

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}\pi.$$

Het volume van een bol met straal r is dan r^3 keer zo groot, zodat $V_{bol}=\frac{4}{3}\pi r^3$

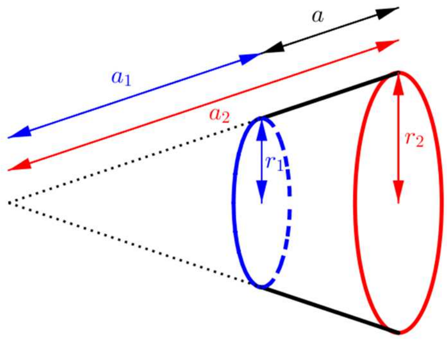
Manteloppervlakte van een omwentelingslichaam

Lemma: De manteloppervlakte van een afgeknotte kegel met stralen r_1 en r_2 en apothema a wordt gegeven door de formule $A=\pi(r_1+r_2)a$.



Op de figuur hiernaast is duidelijk te zien dat het manteloppervlak van een kegel met apothema R en straal r kan ontwikkeld worden tot een cirkelsector met straal R (met middelpuntshoek α).
Het is duidelijk dat de lengte van de cirkelboog $R\alpha$ moet gelijk zijn aan de omtrek van het grondvlak van de kegel $2\pi r$. Dus moet $\alpha = \dfrac{2\pi r}{R}$,

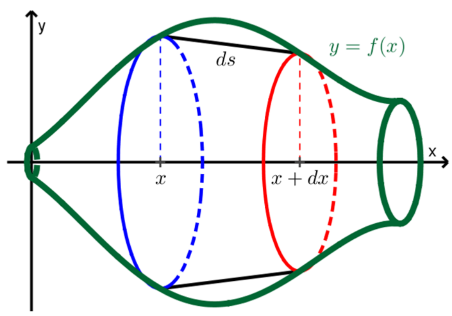
zodat de oppervlakte van zowel cirkelsector als afgeknotte kegel gelijk is aan: $A_\nabla = \dfrac{\alpha R^2}{2} = \dfrac{2\pi r}{2R} R^2 = \pi r R$.



Beschouw nu een afgeknotte kegel zoals op de figuur hiernaast, met stralen r_1 en r_2 en bijhorende schuine zijden a_1 en a_2 (We noemen $a = a_2 - a_1$).
De manteloppervlakte van de afgeknotte kegel wordt dan gegeven door $S = \pi r_2 a_2 - \pi r_1 a_1 = \pi\left(r_2 a_2 - r_1 a_1\right)$.
Uit de figuur volgt ook (wegens gelijkvormige driehoeken) dat: $\dfrac{a_2}{r_2} = \dfrac{a_1}{r_1} \Leftrightarrow a_2 r_1 = a_1 r_2$.

Zo wordt $A = \pi\left(r_2 a_2 - r_1 a_1\right) = \pi\left(r_2\left(a + a_1\right) - r_1\left(a_2 - a\right)\right) = \pi\left(r_2 a \cancel{+ r_2 a_1} \cancel{- r_1 a_2} + r_1 a\right) = \pi\left(r_1 + r_2\right)a$. □

Stelling: De manteloppervlakte van het omwentelingslichaam, verkregen door de grafiek van de afleidbare functie f in het interval $\left[a,b\right]$ te wentelen om de x-as, wordt gegeven door de formule $A = 2\pi \int_a^b f\left(x\right)\sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}\,dx$.



In het interval $\left[x, x + dx\right]$ kunnen we de oppervlakte dS die we zo verkrijgen benaderen door de manteloppervlakte van een afgeknotte kegel met apothema ds en stralen $f\left(x\right)$ en $f\left(x + dx\right)$.
Gebruiken we het lemma dat we net bewezen hebben dan wordt dit:

$$dA = \pi\left(f\left(x\right) + f\left(x + dx\right)\right)ds .$$

Nemen we de som van al deze deeloppervlaktes, en daarna de limiet $dx \to 0$, dan wordt de manteloppervlakte van het omwentelingslichaam, verkregen door de grafiek van f in het interval $\left[a,b\right]$ te wentelen om de x-as, gegeven door $A = 2\pi \int_a^b f\left(x\right)ds$.

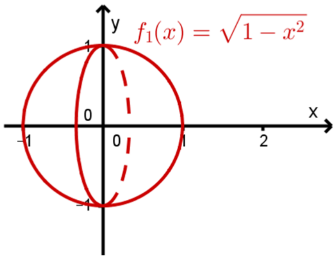
We bewezen reeds (bij de booglengte van een kromme) dat geldt: $ds = \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}\,dx$. Dit invullen in de vorige formule geeft onmiddellijk wat we moesten bewijzen. □

Opmerking: Als de kromme gegeven is met een parametervoorstelling met $x\left(t\right)$ en $y\left(t\right)$ afleidbare functies in een interval $\left[t_1, t_2\right]$, dan wordt de manteloppervlakte van het omwentelingslichaam V verkregen door de kromme in dat interval te wentelen om de x-as gegeven door:

$$A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\,ds = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\left(t\right)\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2 + \left(y'\left(t\right)\right)^2}\,dt$$

Voorbeeld: de bol

We bereken de oppervlakte van de bol met straal 1, die we verkrijgen door de grafiek van de functie $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ in haar domein te wentelen om de x-as.



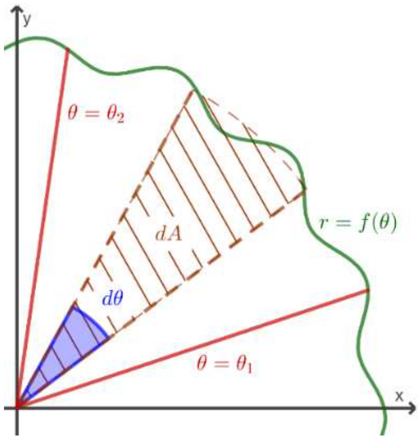
$$S=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-1}^{1}dx=2\pi\left[x\right]_{-1}^{1}=4\pi\,.$$

De oppervlakte van een bol met straal r is dan r^2 keer groter, zodat $S_{bol}=4\pi r^2$.

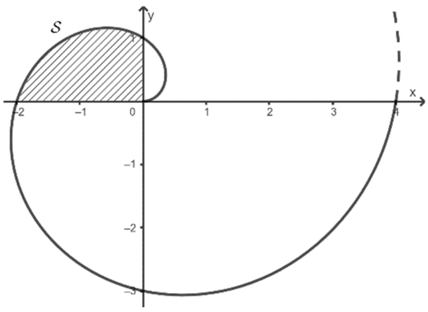
I) Integreren in poolcoördinaten

Oppervlakte

Stel dat een kromme is gegeven in poolcoördinaten: $\mathcal{K}\leftrightarrow r=f(\theta)$. Uit het vorige blijkt dat de oppervlakte dA van een klein stukje cirkelsector kan benaderd worden als $dA=\dfrac{\theta r^2}{2}=\dfrac{\left(f(\theta)\right)^2\cdot d\theta}{2}$. Nemen we dan de som van al deze cirkelsectoren in een interval $\left[\theta_1,\theta_2\right]$, en daarna de limiet $d\theta\to 0$, dan wordt de oppervlakte van het gebied ingesloten door de stralen $\theta=\theta_1$ en $\theta=\theta_2$, en de grafiek van $\mathcal{K}$, verkregen door de formule: $A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(f(\theta)\right)^2d\theta$, ook geschreven als $A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}r^2d\theta$.



Voorbeeld: Bereken de oppervlakte ingesloten door de (Archimedische) spiraal $\mathcal{S}\leftrightarrow r=\dfrac{2\theta}{\pi}$ in kwadrant II ($\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$).



$$A=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)^2d\theta=\frac{2}{\pi^2}\int_{\pi/2}^{\pi}\theta^2d\theta=\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi^3}{24}\right)=\frac{7\pi}{12}$$

Booglengte

Voor de booglengte in poolcoördinaten kunnen we steunen op de booglengte in parametercoördinaten en de omzettingsformules $x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta$ en $y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$ gebruiken:

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta\right)^2+\left(f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(f(\theta)\right)^2+\left(f'(\theta)\right)^2}\,d\theta$$, ook geschreven als $L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$

Voorbeeld: De lengte van de Archimedische spiraal (in het interval $\theta\in\left[0,2\pi\right]$) wordt gegeven door:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)^2+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}\,d\theta\overset{\boxed{GRM}}{\approx}13{,}5322$$

3) Integratiemethoden

a) Onbepaalde integralen

De verzameling van alle primitieve functies van een gegeven functie f noemen we *de onbepaalde integraal* van f. We bewezen reeds dat al deze primitieve functies slechts op een constante na van elkaar verschillen. We noteren de onbepaalde integraal van een functie f als volgt:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Hierbij is dus F een primitieve functie van f. De constante $C \in \mathbb{R}$ noemen we de integratieconstante.

De hoofdstelling van de integraalrekening maakt duidelijk dat differentiëren en integreren bewerkingen zijn die elkaar opheffen. Zo krijgen we dus drie eenvoudige eigenschappen:

- $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$
- $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$
- $D\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$

b) Fundamentele integralen

Volgende lijst van integralen zal ons een houvast bieden bij het berekenen van moeilijkere onbepaalde integralen. Zorg ervoor dat je deze lijst heel goed beheerst!

- $\int dx = x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{Bgsin}\,x + c$
- $\int x^q\,dx = \frac{x^{q+1}}{q+1} + C$ (met $q \neq -1$)
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Bgtan}\,x + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$

Enkel de laatste fundamentele integraal is (misschien) niet onmiddellijk duidelijk. We bewijzen dat de formule wel degelijk klopt door af te leiden:

$$D\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| = \frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+k}}{\sqrt{x^2+k}} = \frac{\cancel{\sqrt{x^2+k}+x}}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)}\sqrt{x^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \quad \square$$

c) Integratie door splitsing

Stelling: Voor integreerbare functies f en g, en reële constanten $r,s \in \mathbb{R}$ geldt de volgende eigenschap:

$$\int \left(r.f(x) + s.g(x)\right)dx = r\cdot\int f(x)\,dx + s\cdot\int g(x)\,dx$$

Bewijs: Het rechterlid afleiden waarna je steunt op de gekende eigenschappen van afgeleiden, geeft:

$$\begin{aligned}D\left(r\cdot\int f(x)\,dx+s\cdot\int g(x)\,dx\right)&=D\left(r\cdot\int f(x)\,dx\right)+D\left(s\cdot\int g(x)\,dx\right)\\&=r\cdot D\left(\int f(x)\,dx\right)+s\cdot D\left(\int g(x)\,dx\right)\\&=r\cdot f(x)+s\cdot g(x),\end{aligned}$$

waaruit volgt dat $\int\left(r.f(x)+s.g(x)\right)dx=r\cdot\int f(x)\,dx+s\cdot\int g(x)\,dx+C$. Maar onbepaalde integralen zijn gelijk op een constante na, dus hebben we bewezen wat we moesten bewijzen. □

Voorbeeld 1: $\int\left(x^3-4x^2+5\right)dx=\int x^3dx-4\int x^2dx+5\int dx=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+5x+C$

Uiteraard kan je hier de tussenstap overslaan. Merk op dat je slechts één integratieconstante schrijft.

Voorbeeld 2: Soms ligt de splitsing iets minder voor de hand:

$$\int\frac{1-x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{-\left(x^2+1\right)+2}{x^2+1}dx=\int\left(-1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx=-\int dx+2\cdot\int\frac{1}{x^2+1}dx=-x+2\ \mathrm{Bgtan}\ x+C$$

Voorbeeld 3: $\int\cot^2 x\,dx=\int\left(\csc^2 x-1\right)dx=\int\csc^2 x\,dx-\int dx=-\cot x-x+C$

Zeer eenvoudige differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld: Bereken $f(x)$ als gegeven is dat $f''(x)=6x$, $f'(2)=10$ en $f(1)=-4$.

$f''(x)=6x\overset{\int}{\Leftrightarrow}f'(x)=3x^2+C$, maar we weten ook $f'(2)=10\Leftrightarrow 3.2^2+C=10\Leftrightarrow C=-2$.

Zo hebben we dus gevonden dat $f'(x)=3x^2-2$, waaruit volgt dat $f(x)=x^3-2x+C$.

Omdat $f(1)=-4\Leftrightarrow 1^3-2.1+C=-4\Leftrightarrow C=-3$. De gezochte functie is dus $f(x)=x^3-2x-3$.

d) Integratie door substitutie

Stelling: Als F een primitieve is van f, en g is een afleidbare functie, dan geldt:

$$\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,dx=F\left(g(x)\right)+c$$

Bewijs: $D\left(F\left(g(x)\right)+c\right)=D\left(F\left(g(x)\right)\right)\overset{\substack{ketting\\regel}}{=}f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ □

In de praktijk komt het er vaak op aan om in het integrandum een functie te herkennen waarvan ook de afgeleide (of differentiaal) in het integrandum staat. Enkele eenvoudige voorbeelden:

Voorbeeld 1: $\int\sin x\left(1-\cos x\right)^3dx\overset{*}{=}\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\left(1-\cos x\right)^4}{4}+C$

> *: Hier is het duidelijk dat $\sin x$ de afgeleide is van $1-\cos x$. We voeren een substitutie uit:
>
> Stel $t=1-\cos x$, dan is $dt=\sin x\,dx$.

Voorbeeld 2: $\int\frac{\sin\left(\ln x\right)}{x}dx\overset{*}{=}\int\sin t\,dt=-\cos t+C=-\cos\left(\ln x\right)+C$

*: Hier is het duidelijk dat $\frac{1}{x}$ de afgeleide is van $\ln x$. We voeren een substitutie uit:

Stel $t=\ln x$, dan is $dt=\frac{dx}{x}$.

Voorbeeld 3: $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\int \frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx \overset{*}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{Bgsin}\, t+C=\text{Bgsin}\left(e^x\right)+C$

*: Hier is het duidelijk dat e^x de afgeleide is van e^x. We voeren een substitutie uit:

Stel $t=e^x$, dan is $dt=e^x dx$.

Aanpassen van de integratiegrenzen

We herbekijken even het eerste voorbeeld uit de vorige paragraaf, maar nu als bepaalde integraal:

Voorbeeld: Bereken de bepaalde integraal $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\left(1-\cos x\right)^3 dx$.

Methode 1: We hebben al een primitieve functie bepaald van deze bepaalde integraal, dus geldt:

$$\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\left(1-\cos x\right)^3 dx=\left[\frac{\left(1-\cos x\right)^4}{4}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)^4}{4}-\frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)^4}{4}=\frac{\left(1-0\right)^4}{4}-\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^4}{4}=\frac{15}{64}$$

Methode 2: We kunnen bij een substitutie ook de integratiegrenzen eenvoudig aanpassen.

$$\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\left(1-\cos x\right)^3 dx \overset{*}{=} \int\limits_{1/2}^{1} t^3 dt=\left[\frac{t^4}{4}\right]_{1/2}^{1}=\frac{1^4}{4}-\frac{\left(1/2\right)^4}{4}=\frac{15}{64}.$$

*: Stel $t=1-\cos x$, dan is $dt=\sin x\, dx$. Voor de grenzen geldt $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ en $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Methode 2 is vaak iets korter en vooral ook eleganter dus deze krijgt de voorkeur.

Eenvoudige substituties

Het komt soms voor dat het integrandum veel eenvoudiger kan geschreven worden met behulp van een lineaire substitutie (stel $t=ax+b$).

Voorbeeld 1: $\int\left(3x-5\right)^6 dx=\int\frac{t^6}{3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^7}{7}+C=\frac{\left(3x-5\right)^7}{21}+C$

Omdat deze substitutie zo eenvoudig is gebruiken we hier soms een kortere notatie:

$$\int\left(3x-5\right)^6 dx=\frac{1}{3}\int\left(3x-5\right)^6 d\left(3x-5\right)=\frac{\left(3x-5\right)^7}{21}+C.$$

Voorbeeld 2: $\int\frac{dx}{9x^2-6x+2}=\int\frac{dx}{\left(3x-1\right)^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(3x-1\right)}{\left(3x-1\right)^2+1}=\frac{1}{3}\text{Bgtan}\left(3x-1\right)+C$

Je kan deze kortere schrijfwijze overigens ook gebruiken bij iets lastigere substituties:

Voorbeeld 3: $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

Of je deze kortere manier om substituties te noteren gebruikt of niet maak je zelf uit. Je wint er uiteraard wat tijd mee, maar het mag niet ten koste gaan van een beter begrip.

Enkele handige formules

Stelling: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Bgtan} \frac{x}{a} + C$ en $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{Bgsin} \frac{x}{a} + C$

Bewijs: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{a}{a^2} \int \frac{d(x/a)}{(x/a)^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{Bgtan} \frac{x}{a} + C$, en

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{a}{a} \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \operatorname{Bgsin} \frac{x}{a} + C \quad \square$$

Voorbeeld: $\int \frac{1}{\sqrt{7+12x-4x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(3-2x)}{\sqrt{16-(3-2x)^2}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Bgsin} \frac{3-2x}{4} + C$

e) Partiële integratie

Het is niet altijd mogelijk een substitutie te vinden die ons toelaat een integraal te berekenen. In dat geval kan partiële integratie helpen:

Stelling: $\int f(x)\, d(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x)\, d(f(x))$

Bewijs: Beide leden afleiden geeft:

$$D\left(\int f(x)\, d(g(x))\right) = D\left(f(x)g(x) - \int g(x)\, d(f(x))\right)$$
$$\Leftrightarrow D\left(\int f(x)\, g'(x) dx\right) = D\left(f(x)g(x)\right) - D\left(\int g(x)\, f'(x) dx\right)$$
$$\Leftrightarrow f(x)\, g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

Onbepaalde integralen zijn gelijk op een constante na, dus we hebben wat we moesten bewijzen. □

Opmerking: De formule voor partiële integratie wordt vaak geschreven als $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

Er zijn een aantal gevallen waar partiële integratie de meest effectieve weg is:

Verlagen van de graad

Als het integrandum bestaat uit het product van een veeltermfunctie (of simpelweg een macht van x) met een exponentiële of een goniometrische functie (van de vorm e^{ax}, $\sin(ax)$ of $\cos(ax)$), dan kan je met partiële integratie de graad van de veelterm verlagen.

Voorbeeld: $\int (x^2+3x-1) \underbrace{\cos x\, dx}_{=d(\sin x)} \overset{P.I.}{=} (x^2+3x-1)\sin x - \int \sin x (2x+3)\, dx = \ldots$

Inderdaad, de veelterm is verlaagd van de tweede naar de eerste graad. We passen nog eens P.I. toe:

$$\ldots = \left(x^2+3x-1\right)\sin x + \int (2x+3)\, d\cos x = \left(x^2+3x-1\right)\sin x + (2x+3)\cos x - \int \cos x \,.\, 2\, dx = \ldots$$

En deze laatste integraal is fundamenteel gekend, zodat we uiteindelijk krijgen:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2+3x-1\right)\cos x\, dx &= \left(x^2+3x-1\right)\sin x + (2x+3)\cos x - 2\sin x + C \\ &= \left(x^2+3x-3\right)\sin x + (2x+3)\cos x + C\end{aligned}$$

Terugkeer van het integrandum

In speciale gevallen kan het zijn dat je na (meerdere keren) partiële integratie je oorspronkelijke integraal ziet weerkeren. In dat geval spreken we van een weerkerend integrandum. Dit is bijvoorbeeld het geval als het integrandum het product is van een exponentiële en een goniometrische functie (van de vorm e^{ax}, $\sin(ax)$ of $\cos(ax)$).

Voorbeeld: Bereken de integraal $\int e^{5x} \cos 2x\, dx$

$$\begin{aligned} I = \int e^{5x} \underbrace{\cos 2x\, dx}_{=\frac{1}{2}d(\sin 2x)} &\overset{P.I.}{=} \frac{1}{2}e^{5x}\sin 2x - \frac{5}{2}\int e^{5x} \underbrace{\sin 2x\, dx}_{=-\frac{1}{2}d(\cos 2x)} \\ &= \frac{1}{2}e^{5x}\sin 2x - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{5x}\cos 2x + \frac{5}{2}\int e^{5x}\cos 2x\, dx\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{5x}\sin 2x + \frac{5}{4}e^{5x}\cos 2x - \frac{25}{4}\underbrace{\int e^{5x}\cos 2x\, dx}_{=I} \end{aligned}$$

Deze laatste integraal is net de integraal waar we mee begonnen zijn, dus hieruit volgt:

$$\frac{29}{4}I = \frac{1}{2}e^{5x}\sin 2x + \frac{5}{4}e^{5x}\cos 2x \Leftrightarrow I = \int e^{5x}\cos 2x\, dx = \frac{2}{29}e^{5x}\sin 2x + \frac{5}{29}e^{5x}\cos 2x + C$$

Altijd een optie...

Soms is het niet altijd meteen duidelijk wat je met het integrandum kan doen. Maar wat je altijd kan doen is afleiden. Een partiële integratie die dus altijd kan is: $\int f(x)dx = x\, f(x) - \int x\, f'(x)dx$.

Voorbeeld: $\int \ln x\, dx = x\ln x - \int \cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}dx = x\ln x - x + C$

f) Integralen van rationale functies

Onbepaalde integralen van rationale functies zijn heel eenvoudig te berekenen maar ze vragen enorm veel rekenwerk.

De Euclidische deling leert ons $A(x) = D(x)\cdot Q(x) + R(x) \Leftrightarrow \dfrac{A(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$, waarbij geldt $gr\left(R(x)\right) < gr\left(D(x)\right)$.

Voor de integraal geldt dus ook: $\int \dfrac{A(x)}{D(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \dfrac{R(x)}{D(x)}dx$.

We mogen ons dus voor de rest concentreren op 'echte' veeltermbreuken, waarbij de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer.

Vaak zullen deze rationale moeten worden gesplitst in *partieelbreuken*. We hebben daarvoor twee stelling nodig:

De hoofstelling van de algebra: Elke reële veelterm van graad minstens één kan ontbonden worden in een product van eerstegraadsfactoren en tweedegraadsfactoren (met een negatieve discriminant).

De stelling van Jacobi: Elke echte veeltermbreuk kan geschreven worden als som van partieelbreuken.

We bekijken nu in detail de methode van Jacobi om een rationale functie te schrijven als som van partieelbreuken:

① Schrijf de functie als som van een veelterm en een echte veeltermbreuk (Euclidische deling).

② Ontbind de noemer in zoveel mogelijk reële factoren van de eerste of tweede graad. Zorg ervoor dat er in de noemer enkel nog factoren voorkomen van de vorm $(x+a)^n$ en $(x^2+bx+c)^n$.

③ a) Elke factor $(x+a)^n$ in de noemer levert een som partieelbreuken van de vorm

$$\frac{A}{x+a}+\frac{B}{(x+a)^2}+\frac{C}{(x+a)^3}+\ldots+\frac{N}{(x+a)^n}$$

b) Elke factor $(x^2+bx+c)^n$ in de noemer levert een som partieelbreuken van de vorm

$$\frac{Px+Q}{x^2+bx+c}+\frac{Rx+S}{(x^2+bx+c)^2}+\frac{Tx+U}{(x^2+bx+c)^3}+\ldots+\frac{Yx+Z}{(x^2+bx+c)^n}$$

De onbekende tellers worden achteraf berekend met de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

Voorbeeld 1: Bereken $\int \frac{2x^5-5x^4+6x^3-11x^2+5x-3}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}dx$

We schrijven het integrandum eerst als som van een veelterm en partieelbreuken (Jacobi):

Stap 1: $\frac{2x^5-5x^4+6x^3-11x^2+5x-3}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}=2x+1+\frac{3x^3-8x^2+4x-5}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}$ (Euclidische deling)

Stap 2: $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=(x^2+1)(x-1)(x-2)$

Stap 3: $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x-2}=\frac{(Ax+B)(x-1)(x-2)+C(x^2+1)(x-2)+D(x^2+1)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)(x-2)}$

$$=\frac{(A+C+D)x^3+(-3A+B-2C-D)x^2+(2A-3B+C+D)x+(2B-2C-D)}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C+D=3\\-3A+B-2C-D=-8\\2A-3B+C+D=4\\2B-2C-D=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=0\\C=3\\D=-1\end{cases}$$

En dus geldt: $\dfrac{2x^5-5x^4+6x^3-11x^2+5x-3}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}=2x+1+\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}$

$$\Rightarrow \int \frac{2x^5-5x^4+6x^3-11x^2+5x-3}{x^4-3x^3+3x^2-3x+2}dx=\int(2x+1)dx+\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{3\,dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x-2}$$
$$=x^2+x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+3\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\int\frac{d(x-2)}{x-2}$$
$$=x^2+x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+3\ln|x-1|-\ln|x-2|+C$$

Zoals je ziet heel eenvoudig, maar redelijk wat rekenwerk.

Voorbeeld 2: Bereken $\displaystyle\int\frac{6x^3+24x+13}{x^4-4x^3-x^2+14x+10}dx$

Dit is al een echte veeltermbreuk. De noemer is $x^4-4x^3-x^2+14x+10=\left(x^2-6x+10\right)(x+1)^2$.

$$\frac{Ax+B}{x^2-6x+10}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}=\frac{(Ax+B)(x+1)^2+C\left(x^2-6x+10\right)(x+1)+D\left(x^2-6x+10\right)}{\left(x^2-6x+10\right)(x+1)^2}$$
$$=\frac{(A+C)x^3+(2A+B-5C+D)x^2+(A+2B+4C-6D)x+(B+10C+10D)}{x^4-4x^3-x^2+14x+10}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=6\\2A+B-5C+D=0\\A+2B+4C-6D=24\\B+10C+10D=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=4\\B=3\\C=2\\D=-1\end{cases}$$

Dus $\displaystyle\int\frac{6x^3+24x+13}{x^4-4x^3-x^2+14x+10}dx=\int\frac{4x+3}{x^2-6x+10}dx+2\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}$

Hierbij geldt: $\displaystyle\int\frac{4x+3}{x^2-6x+10}dx=\int\frac{2(2x-6)+15}{x^2-6x+10}dx=2\int\frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx+15\int\frac{dx}{(x-3)^2+1}$

$$=2\int\frac{d\left(x^2-6x+10\right)}{x^2-6x+10}+15\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1}$$
$$=2\ln\left|x^2-6x+10\right|+15\,\text{Bgtan}(x-3)+C$$

$2\displaystyle\int\frac{dx}{x+1}=2\int\frac{d(x+1)}{x+1}=2\ln|x+1|+C$ en $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x+1}+C$

Zodat $\displaystyle\int\frac{6x^3+24x+13}{x^4-4x^3-x^2+14x+10}dx=2\ln\left|x^2-6x+10\right|+15\,\text{Bgtan}(x-3)+2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$

De enige moeilijk(re) integraal die je na het splitsen in partieelbreuken kan bekomen is de integraal van de vorm $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$ (met in de noemer een negatieve discriminant, en $n\geq 2$). Daarvoor zien we in de oefeningen een bekende recursieformule.

g) Goniometrische integralen

Bij goniometrische integralen komt het er meestal op neer de gekende goniometrische formules te gebruiken om zo het integrandum te herschrijven naar een lineaire uitdrukking in sinussen en cosinussen ofwel om met een substitutie de integraal om te zetten naar een rationale integraal. We beginnen dit hoofdstuk(je) met twee integralen die de moeite zijn om te onthouden (omdat je ze vaak tegenkomt):

Stelling: $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ en $\int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

Bewijs: $\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx \overset{t=\sin x}{=} \int \frac{dt}{1-t^2} \overset{*}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} = \ldots$

$$\left(*: 1-t^2 = (1+t)(1-t) \Rightarrow \frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t)+B(1+t)}{(1+t)(1-t)} \Leftrightarrow \begin{cases} -A+B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \end{cases}\right)$$

$$\ldots = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+t)}{1+t} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-t)}{1-t} = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1+t}{1-t}\right|} + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|} + C = \ldots$$

Met behulp van wat eenvoudige goniometrie wordt dit:

$$\ldots = \ln\sqrt{\left|\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\right|} + C = \ln\sqrt{\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right|} + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Stellen we hierin $x = \frac{\pi}{2} - t$, dan wordt dit:

$$\int \underbrace{\sec\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}_{=\csc t} \underbrace{d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}_{=-dt} = \ln\left|\underbrace{\sec\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}_{=\csc t} + \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}_{=\cot t}\right| + C \Leftrightarrow \int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C\,. \ \square$$

We berekenen een aantal andere goniometrische integralen als illustratie. Deze lijst voorbeelden (met bijhorende methodes) is zeker niet exhaustief. Vaak zijn er ook meerdere werkwijzen mogelijk. Zeker

Voorbeeld 1: $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x\, dx = -\int \cos^4 x \cdot (1-\cos^2 x)\, d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$

Deze methode werkt altijd bij een product van machten van sinus en of cosinus als minstens één exponent oneven is. Als beide machten even zijn kan de graad verlaagd worden met de formules van Carnot, zoals in het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 2: $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x\, dx = \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4\, dx = \frac{1}{16}\int (\sin^2 2x)^2\, dx = \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{64}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 4x\, dx = \frac{x}{64} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 8x}{2}dx$$

$$= \frac{x}{64} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C = \frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C$$

Met de formules van Simpson kan je een product van sinussen en/of cosinussen altijd als een som schrijven.

Voorbeeld 3: $\int \sin 7x \cdot \cos 3x\, dx = \int \frac{\sin 4x + \sin 10x}{2}dx = \frac{-\cos 4x}{8} - \frac{\cos 10x}{20} + C$

Als er sinussen en cosinussen in de noemer staan is soms de substitutie $t = \tan x$ handig:

Voorbeeld 4: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\int\frac{\sec^4 x}{\tan^3 x}dx\overset{*}{=}\int\frac{1+t^2}{t^3}dt=\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}\right)dt=-\frac{1}{2t^2}+\ln|t|+C$

$$=\frac{-1}{2\tan^2 x}+\ln|\tan x|+C$$

$*$: stel $t=\tan x \Rightarrow dt=\sec^2 x\,dx$, zodat $\sec^4 x\,dx=\sec^2 x\cdot\sec^2 x\,dx=\left(1+t^2\right)dt$

Met behulp van de t-formules kan je goniometrische integralen vaak omzetten naar rationale integralen:

Met $t=\tan\frac{x}{2}$ geldt $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ en $x=2\,\mathrm{Bgtan}\,t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Voorbeeld 5: $\displaystyle\int\frac{dx}{3+5\cos x}\overset{t}{=}\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{3\left(1+t^2\right)+5\left(1-t^2\right)}=\int\frac{dt}{4-t^2}\overset{SIP}{=}\frac{1}{4}\int\frac{dt}{2+t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{2-t}$

$$=\frac{1}{4}\ln|2+t|-\frac{1}{4}\ln|2-t|+C=\frac{1}{4}\ln\left|2+\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|2-\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

h) Integralen van irrationale functies

Een voor de hand liggende substitutie

Komt een lineaire uitdrukking $y=ax+b$ onder een aantal wortels voor voer dan de substitutie uit $t^n=ax+b$ waarbij n het kleinste gemene veelvoud is van de wortelexponenten.

Voorbeeld: $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{2x-5}}{\sqrt[3]{2x-5}}dx\overset{*}{=}\int\frac{\frac{t^6+5}{2}-t^3}{\cancel{t^2}}\cdot 3t^{\cancel{5}\,3}dt=\int\left(\frac{3}{2}t^9+\frac{15}{2}t^3-3t^6\right)dt$

$$=\frac{3}{20}t^{10}+\frac{15}{8}t^4-\frac{3}{7}t^7+C=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-5)^5}+\frac{15}{8}\sqrt[3]{(2x-5)^2}-\frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x-5)^7}+C$$

$*$: $2x-5=t^6\Leftrightarrow x=\frac{t^6+5}{2}\Rightarrow dx=3t^5dt$

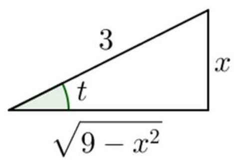
Goniometrische substituties

De meeste irrationale integralen zijn echter niet via eenvoudige substituties te herleiden naar eenvoudige(re) integralen. In dat geval zijn goniometrische substituties aangewezen.

Type 1: Komt de vorm $\sqrt{a^2-x^2}$ voor (met $a>0$), dan is de substitutie $x=a\sin t$ aangewezen.

In dat geval zal $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$, met $t\in[-\pi/2,\pi/2]$

(en ook zal $dx=a\cos t\,dt$ en $t=\mathrm{Bgsin}\frac{x}{a}$)



Voorbeeld: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{9-x^2}}\overset{*}{=}\int\frac{\cancel{3\cos t}\,dt}{9\sin^2 t.\cancel{3\cos t}}=-\frac{1}{9}\cot t+C=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+C$

$*$: $x=3\sin t\Rightarrow\sqrt{9-x^2}=3\cos t$ en $dx=3\cos t$, met $t\in[-\pi/2,\pi/2]$.

($\cot t=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$)

Type 2: Komt de vorm $\sqrt{x^2-a^2}$ voor (met $a>0$), dan is de substitutie $x=a\sec t$ aangewezen.

Want dan zal: $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=\begin{cases} a\tan t & \text{, als } t\in[0,\pi/2[\quad (\text{en dus } x\geq a) \\ -a\tan t & \text{, als } t\in]\pi/2,\pi] \quad (\text{en dus } x\leq -a)\end{cases}$

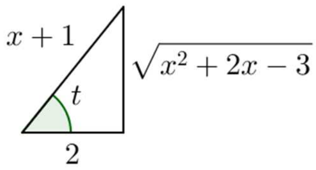
(en ook zal $dx=a\sec t\tan t\,dt$ en $t=\operatorname{Bgsec}\dfrac{x}{3}=\operatorname{Bgcos}\dfrac{3}{x}$)

Voorbeeld: $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx \overset{*}{=} \int\frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{(x+1)^3}dx=\int\frac{2\tan t}{8\sec^3 t}2\sec t\tan t\,dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int\sin^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2t)\,dt=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t+C$

$\displaystyle=\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\sin t\cos t+C=\frac{1}{4}\operatorname{Bgcos}\frac{2}{x+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}+C$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\operatorname{Bgcos}\frac{2}{x+1}-\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{2(x+1)^2}+C$ (gesteld dat $x\geq 1$)



($\cos t=\dfrac{2}{x+1}$ en $\sin t=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}$)

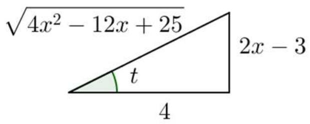
$*: x+1=2\sec t\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2-4}=2\tan t$ en $dx=2\sec t\tan t\,dt$

Opmerking: Bij bepaalde integralen ga je naargelang het integratie-interval dus moeten kiezen waaraan de wortel gelijk is. Bij onbepaalde integralen wordt vaak (voor de eenvoud) gesteld dat $x\geq a$.

Type 3: Komt de vorm $\sqrt{x^2+a^2}$ voor (met $a>0$), dan is de substitutie $x=a\tan t$ aangewezen.

Want dan zal $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}=a\sec t$, met $t\in[-\pi/2,\pi/2]$

(en ook zal $dx=a\sec^2 t\,dt$ en $t=\operatorname{Bgtan}\dfrac{x}{a}$)



Voorbeeld: $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(\sqrt{4x^2-12x+25}\right)^3}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{(2x-3)^2+16}\right)^3}\overset{*}{=}\int\frac{2\sec^2 t}{64\sec^3 t}dt$

($\sin t=\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2-12x+25}}$)

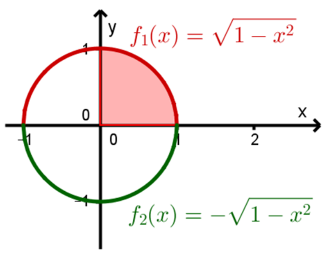
$\displaystyle=\frac{1}{32}\int\cos t\,dt=\frac{1}{32}\sin t+C=\frac{1}{32}\cdot\frac{2x-3}{\sqrt{4x^2-12x+25}}+C$

$*: 2x-3=4\tan t\Rightarrow\sqrt{(2x-3)^2+16}=4\sec t$ en $dx=2\sec^2 t\,dt$

Toepassing: cirkel, cirkelsector en cirkelsegment

We bereken de oppervlakte van de (goniometrische) cirkel $c\leftrightarrow x^2+y^2=1$.

De vergelijking valt dus uiteen in twee functies $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ en $f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

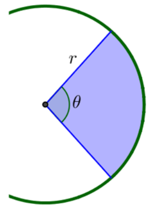


Uit de figuur volgt duidelijk dat de oppervlakte van de cirkel gegeven wordt door

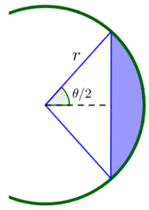
$$A=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{*}{=}-4\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt=2\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt=2\cdot\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

$*$: Stel $x=\cos t$ (met $t\in[0,\pi/2]$, dan is $dx=-\sin t\,dt$, $\sqrt{1-x^2}=\sin t$.

(Merk op dat het logisch is om hier $x = \cos t$ *te stellen in plaats van* $x = \sin t$ *, wat ook zou werken)*



Een cirkel met straal r heeft een oppervlakte die r^2 keer groter is, zodat $A_{\bigcirc} = \pi r^2$.
De oppervlakte van een *cirkelsector* met straal r en middelpuntshoek θ wordt dan wegens de regel van drie gegeven door $A_{\text{sector}} = \dfrac{\theta}{2\pi} A_{\bigcirc} = \dfrac{\theta}{2\pi}\pi r^2 = \dfrac{\theta r^2}{2}$.



Om de oppervlakte van het *cirkelsegment* te vinden met straal r en middelpuntshoek θ moeten we van de cirkelsector de driehoek aftrekken met als basis $2r\sin\dfrac{\theta}{2}$ en hoogte $r\cos\dfrac{\theta}{2}$:

$$A_{\text{segment}} = A_{\text{sector}} - A_{\Delta} = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{2r\sin\frac{\theta}{2}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}{2} = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{r^2\sin\theta}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\theta - \sin\theta\right).$$