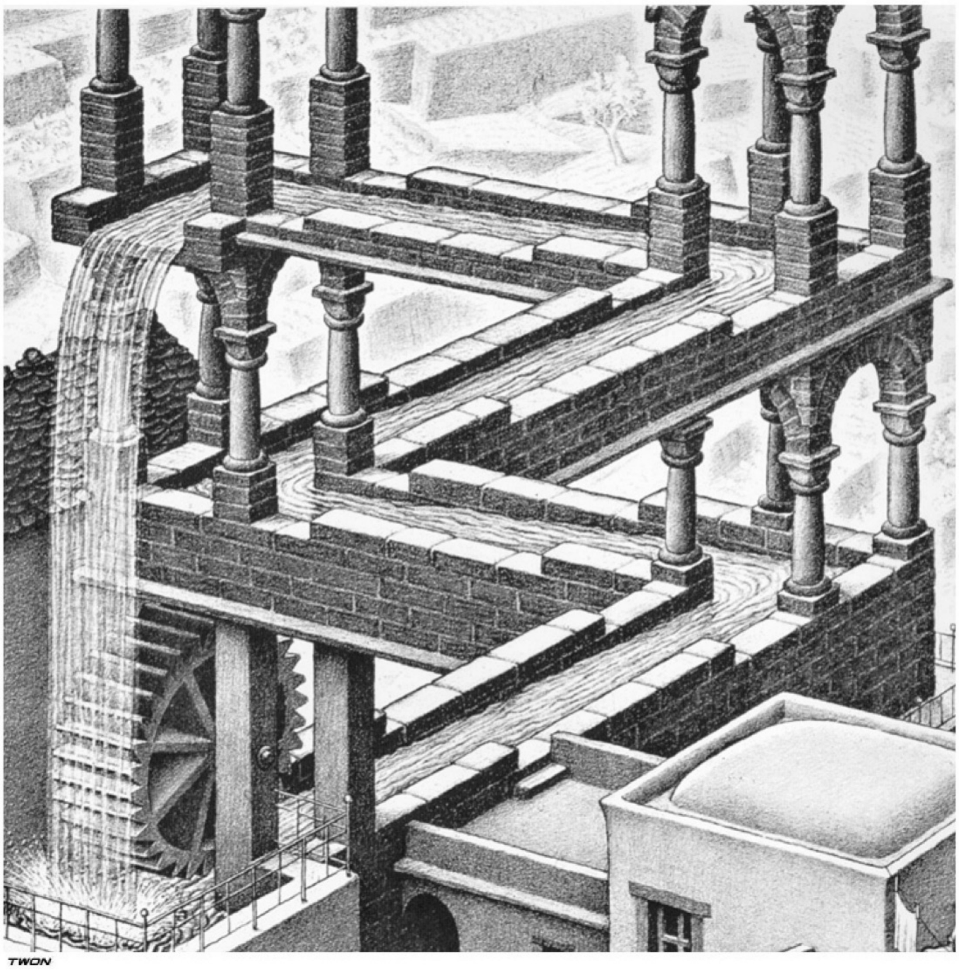
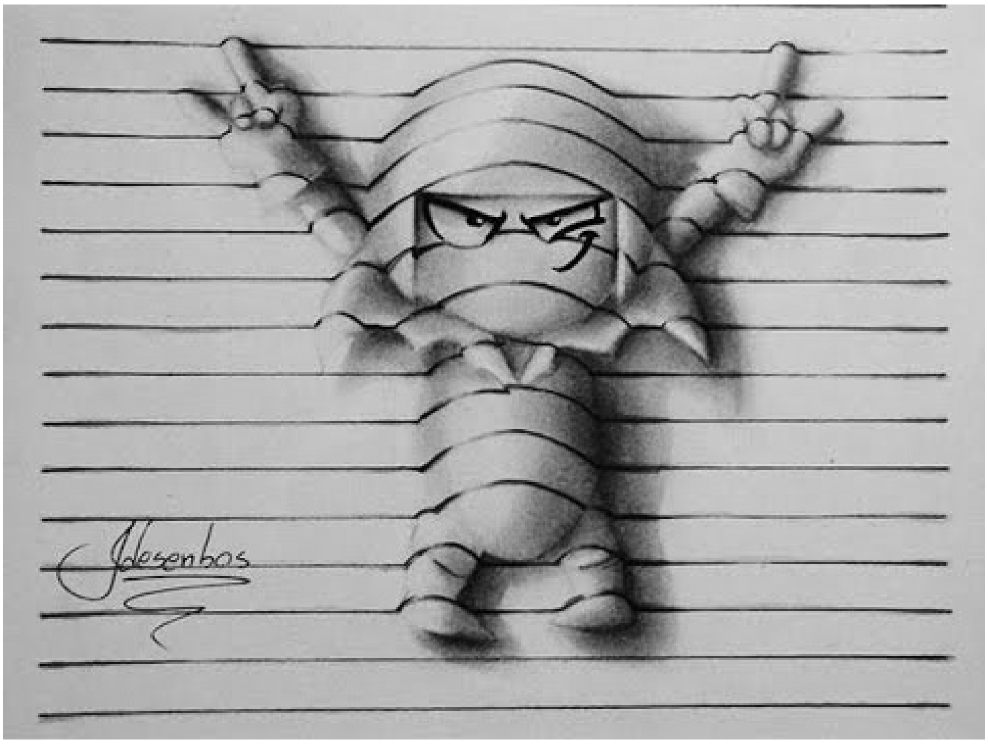
Ruimtemeetkunde



(Waterval, door Maurits Cornelius Escher, 1961)



(http://www.boredpanda.com/3d-lines-notepad-drawings-15-years-old-joao-carvalho/)

1) Synthetische ruimtemeetkunde & ruimtelijk inzicht

a) Bouwstenen en elementaire ruimtemeetkunde

Notaties en definities

In de ruimtemeetkunde zijn de bouwstenen punten, rechten en vlakken. Punten duiden we aan met hoofdletters ($A, B, \ldots$), rechten met kleine letters ($a, b, \ldots$) en vlakken met Griekse letters ($\alpha, \beta, \ldots$).

Een punt A *ligt op* een rechte a noteren we $A \in a$ (letterlijk: A is een element van a).
Een punt A *ligt in* een vlak α noteren we $A \in \alpha$ (letterlijk: A is een element van α).
Een rechte a *ligt in* een vlak α noteren we $a \subset \alpha$ (letterlijk: a is een deelverzameling van α).
Punten die tot eenzelfde rechte behoren noemen we *collineair*. Punten (en rechten) die tot eenzelfde vlak behoren noemen we *coplanair*. Rechten die door eenzelfde punt gaan heten *concurrent*.
Wat betreft het voorstellen van ruimtelijke situaties spreken we het volgende af:

- Evenwijdige rechten worden ook op de tekening evenwijdig getekend.
- Gelijke lijnstukken die evenwijdig zijn, worden als gelijke lijnstukken getekend.
- Onzichtbare lijnen worden in streeplijn getekend.

Bepalen van een vlak

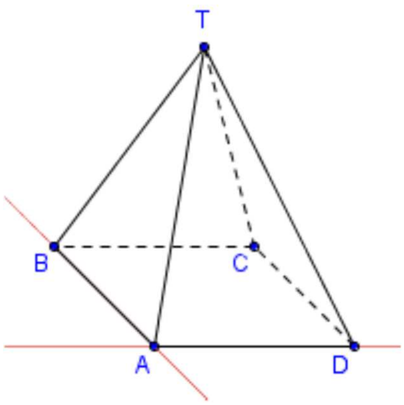
Een vlak kunnen we eenduidig bepalen op de volgende manieren:

- Drie niet-collineaire punten
- Een rechte en een punt niet op die rechte gelegen
- Twee snijdende rechten
- Twee strikt evenwijdige rechten

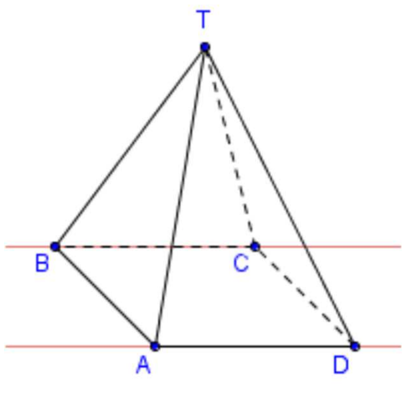
Een vlak bepaald door bijvoorbeeld de evenwijdige rechten a en b noteren we met $vl(a,b)$.

Onderlinge ligging van twee rechten

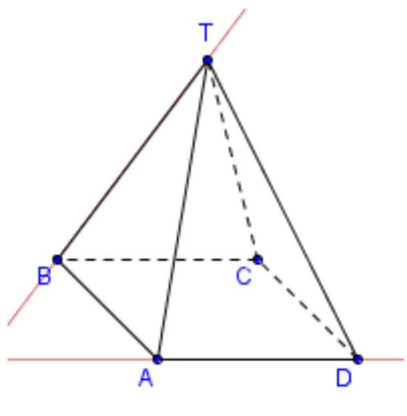
In de vlakke meetkunde (en bij uitbreiding dus ook in de ruimte) kennen we reeds 3 mogelijke onderlinge liggingen van twee rechten. Rechten kunnen in een vlak samenvallend, snijdend of strikt evenwijdig zijn. In de ruimte is er echter nog een vierde mogelijk: *kruisend.*



AB en AD zijn snijdend



AD en BC zijn strikt evenwijdig



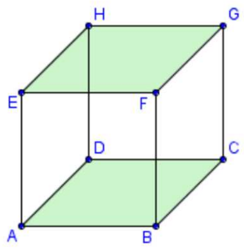
AD en BT zijn kruisend

Twee rechten zijn dus kruisend als ze noch snijdend, noch evenwijdig zijn. Ze liggen nooit in hetzelfde vlak.

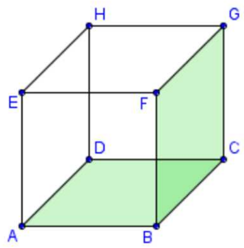
Onderlinge ligging van twee vlakken

Voor de onderlinge ligging van twee vlakken α en β zijn er drie mogelijkheden:

- Ze zijn samenvallend: $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$.
- Ze zijn strikt evenwijdig: $\alpha \cap \beta = \varnothing$.
- Ze zijn snijdend: $\alpha \cap \beta = s$, met s de snijlijn van beide vlakken.



Ondervlak en bovenvlak zijn strikt evenwijdig
$vl(ABC) \parallel vl(EFG),\ vl(ABC) \cap vl(EFG) = \varnothing$

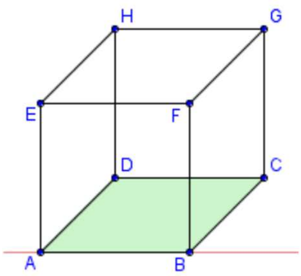


Ondervlak en zijvlak zijn snijdend
$vl(ABC) \cap vl(BCG) = BC$

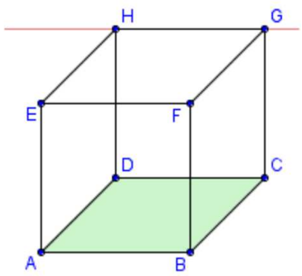
Onderlinge ligging van een rechte en een vlak

Ook voor de onderlinge ligging van een vlak α en een rechte a zijn er drie mogelijkheden:

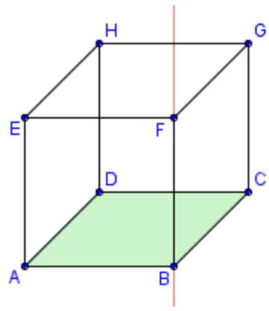
- De rechte ligt in het vlak: $a \cap \alpha = a$ (wordt ook genoteerd met $a \subset \alpha$).
- De rechte is strikt evenwijdig aan het vlak: $a \cap \alpha = \varnothing$.
- De rechte snijdt het vlak: $a \cap \alpha = \{S\}$.



AB ligt in $vl(ABC)$:
$AB \subset vl(ABC)$



GH en $vl(ABC)$ zijn strikt evenwijdig: $GH \cap vl(ABC) = \varnothing$



BF snijdt $vl(ABC)$:
$BF \cap vl(ABC) = \{B\}$

b) Evenwijdigheid in de ruimte

Stelling ①:	Twee verschillende vlakken die een punt gemeen hebben, snijden elkaar en hun snijlijn gaat door dat punt.
Stelling ②:	Als een vlak één van twee evenwijdige rechten snijdt, dan snijdt het ook de andere rechte.
Stelling ③:	Een rechte is evenwijdig met een vlak als ze evenwijdig is met een rechte van dat vlak.
Stelling ④:	Trek je aan een rechte evenwijdig met een vlak, een evenwijdige door een punt van dat vlak, dan ligt die evenwijdige in dat vlak.
Stelling ⑤:	Twee rechten die evenwijdig zijn aan een derde rechte, zijn ook onderling evenwijdig.
Stelling ⑥:	Als een rechte evenwijdig is met twee snijdende vlakken dan is ze dat ook met hun snijlijn.
Stelling ⑦:	Als men door een rechte evenwijdig aan een vlak een ander vlak aanbrengt dat het oorspronkelijke vlak snijdt, dan is de snijlijn evenwijdig met de oorspronkelijke rechte.
Stelling ⑧:	Als twee snijdende rechten van een vlak evenwijdig zijn met een ander vlak, dan zijn ook deze vlakken evenwijdig.
Gevolgen:	• Twee vlakken zijn evenwijdig als en slechts als twee snijdende rechten van het ene vlak evenwijdig zijn met twee snijdende rechten van het andere vlak. • Door een punt buiten een vlak gelegen bestaat er juist één vlak evenwijdig ermee. • Alle rechten door een punt evenwijdig met een vlak liggen in één (evenwijdig) vlak.
Stelling ⑨:	De snijlijnen van twee strikt evenwijdige vlakken met een derde vlak zijn onderling evenwijdig.

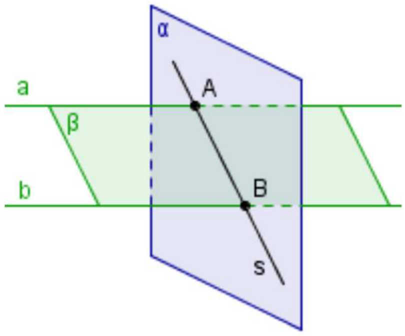
Bij wijze van voorbeeld bewijzen we stellingen ②, ⑤ en ⑨.

② *Geg.:* twee rechten $a // b$ en een vlak α zodat $a \cap \alpha = \{A\}$.

T.B.: $b \not\parallel \alpha$

Bewijs: Evenwijdigheid houdt twee mogelijkheden in (samenvallend en strikt evenwijdig):

1) Als a en b samenvallend zouden zijn is het gestelde evident.
2) Als a en b strikt evenwijdig zijn bepalen ze een vlak $\beta = vl(a,b)$.



Aangezien $A \in \alpha \cap \beta$ snijden de vlakken α en β elkaar in een rechte s (stelling ①).
Noem B het snijpunt van s en b (dit bestaat want a en b liggen in een vlak en a snijdt s), dan ligt B dus ook in α ($B \in s \subset \alpha \Rightarrow B \in \alpha$).
B is het enige snijpunt van b met α want mocht er nog één zijn, dan zou het al zeker niet op s kunnen liggen, en dan zouden α en β drie niet-collineaire punten gemeenschappelijk hebben, en dus samenvallen (wat niet kan want a snijdt α). □

⑤ *Geg.:* drie rechten a,b,c zodat $a // b \wedge b // c$

T.B.: $a // c$

Bewijs: We stellen dat a,b,c verschillende rechten zijn. We overlopen de liggingen voor a en c:

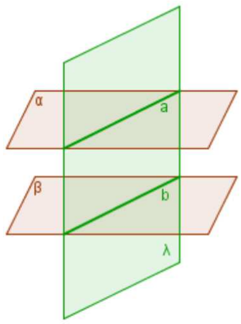
1) a snijdt c in een punt S: dan zouden er in het vlak $vl(b,S)$ twee verschillende rechten bestaan door S die evenwijdig zijn met b, wat uiteraard niet kan. ↯
2) a kruist c: neem een willekeurig punt $A \in a$, en beschouw het vlak $\gamma = vl(c,A)$.
   Vermits a en c kruisend zijn liggen ze niet in hetzelfde vlak, dus snijdt de rechte a het vlak γ (in het punt A). We gebruiken nu tweemaal stelling ②:
   D a snijdt γ en $a // b \Rightarrow b$ snijdt ook γ. b snijdt γ en $b // c \Rightarrow c$ snijdt ook γ.
   Dat laatste is uiteraard onmogelijk want $c \subset \gamma$. ↯
3) De enige resterende mogelijkheid is dat $a // c$. □

⑨ *Geg.:* drie vlakken α, β, λ zodat $\alpha // \beta$ (en $\alpha \cap \beta = \varnothing$), $\alpha \cap \lambda = a$ en $\beta \cap \lambda = b$

T.B.: $a // b$

Bewijs: a en b liggen in λ en zijn dus ofwel snijdend, ofwel evenwijdig:

1) a snijdt b in een punt S: dan ligt S zowel in α als in β want $S \in a \subset \alpha$ en $S \in b \subset \beta$. Maar dit kan niet want $\alpha \cap \beta = \varnothing$. ↯
2) $a // b$ is de resterende mogelijkheid. □



c) Loodrechte stand in de ruimte

Definitie: De hoek tussen twee kruisende rechten is de hoek die je bekomt door één van de rechten te verschuiven tot ze de ander snijdt: $\widehat{ab} = \widehat{a'b}$ met $a' // a$ en $a' \cap b = \{S\}$.

Definitie: Een rechte staat loodrecht op een vlak als en slechts als ze loodrecht staat op elke rechte die in dat vlak ligt.

Definitie: Twee vlakken staan loodrecht op elkaar als en slechts als het ene vlak een loodlijn op het andere vlak omvat.

Stelling ❶:	Een rechte staat loodrecht op een vlak als en slechts als ze loodrecht staat op twee snijdende rechten van dat vlak.
Stelling ❷:	Er bestaat juist één loodlijn uit een punt op een vlak.
Stelling ❸:	Er bestaat juist één loodvlak uit een punt op een rechte.

Stelling ❹:	Loodlijnen op eenzelfde vlak zijn evenwijdig.
Stelling ❺:	Loodvlakken op eenzelfde rechte zijn evenwijdig.
Stelling ❻:	Als één van twee evenwijdige rechten loodrecht staat op een vlak, dan ook de andere.
Stelling ❼:	Als één van twee evenwijdige vlakken loodrecht staat op een rechte, dan ook het andere.
Stelling ❽:	Een vlak dat loodrecht staat op een ander vlak, staat ook loodrecht op elk vlak dat daarmee evenwijdig is.
Stelling ❾:	De snijlijn van twee vlakken die loodrecht staan op een derde vlak, staat ook loodrecht op dat vlak.
Stelling ❿:	Twee vlakken die loodrecht staan op twee rechten die loodrecht op elkaar staan, zijn ook onderling loodrecht. Twee rechten die loodrecht staan op twee vlakken die loodrecht op elkaar staan, zijn ook onderling loodrecht.

Bij wijze van voorbeeld bewijzen we hier stelling ❺.

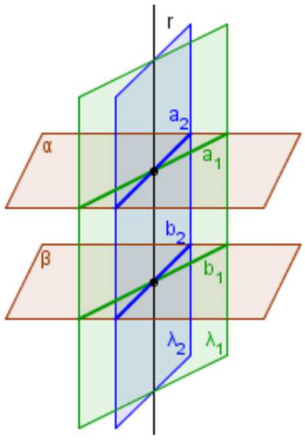
Geg.: twee vlakken α en β en een rechte r zodat $r \perp \alpha \ \wedge \ r \perp \beta$

T.B.: $\alpha \parallel \beta$

Bewijs: Beschouw twee verschillende vlakken λ_1 en λ_2 die r omvatten.

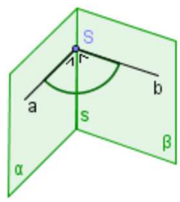
- λ_1 snijdt α in een rechte a_1 en β in een rechte b_1. Omdat α en β beide loodvlakken op r zijn geldt $a_1 \perp r \ \wedge \ b_1 \perp r \ \Rightarrow a_1 \parallel b_1$.
- λ_2 snijdt α in een rechte a_2 en β in een rechte b_2. Omdat α en β beide loodvlakken op r zijn geldt $a_2 \perp r \ \wedge \ b_2 \perp r \ \Rightarrow a_2 \parallel b_2$.

Twee snijdende rechten van α zijn dus evenwijdig met twee snijdende rechten van $\beta \Rightarrow \alpha$ en β zijn evenwijdig (stelling ⑧).□



d) Afstanden en hoeken in de ruimte

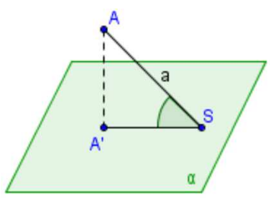
Hoek van twee vlakken



Definitie: De hoek die twee vlakken met elkaar maken is de hoek gevormd door twee loodlijnen op de snijlijn, die in de vlakken liggen.

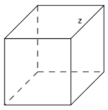
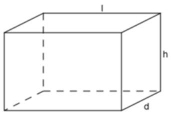
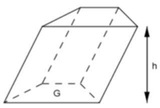
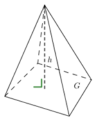
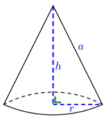
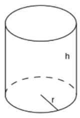
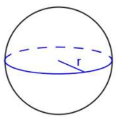
Hoek van een rechte en een vlak

Definitie: De hoek die een rechte met een vlak maakt (de rechte mag niet in het vlak liggen, noch er loodrecht op staan) is de hoek die de rechte insluit met haar loodrechte projectie op dat vlak.



e) Oppervlakte en inhoud van ruimtefiguren

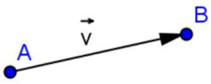
De volgende formules kennen we al enkele jaren:

Ruimtefiguur	Figuur	Oppervlakte	Volume
Kubus		$A = 6z^2$	$V = z^3$
Balk		$A = 2.(ld + dh + hl)$	$V = lhd$
Prisma		$A = som\ der\ zijvlakken$	$V = A_G.h$
Piramide		$A = som\ der\ zijvlakken$	$V = \frac{1}{3}A_G.h$
Kegel		$A = \pi r^2 + \pi ra$ (met $a = \sqrt{r^2 + h^2}$)	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Cilinder		$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$	$V = \pi r^2 h$
Bol		$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

2) Vectoren & coördinaten

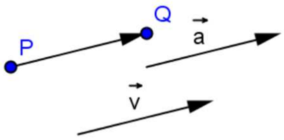
a) Definities en notaties

Een *vector* is een wiskundige grootheid die een grootte, een richting en een zin heeft. In het vlak kunnen we vectoren voorstellen als een pijl tussen twee punten. We noteren een vector bepaald door *beginpunt* A en *eindpunt* B meestal als $\overrightarrow{AB}$, of onafhankelijk van deze punten als $\vec{v}$.



De grootte (of *norm*) van een vector $\overrightarrow{AB}$ noteren we als $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, dit is de lengte van het lijnstuk $|AB|$.

De vector met lengte 0 noemen we de nulvector en noteren we met $\vec{o}$. Hij heeft geen richting of zin.

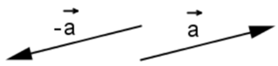


Bij de grafische voorstelling van een vector moet ook het beginpunt of *aangrijpingspunt* gekend zijn. Mag dit punt vrij gekozen worden, dan spreken we over *vrije vectoren* en in het andere geval van *gebonden vectoren*. Een vrije vector kan je beschouwen als een vector die je vrij kan verschuiven. Twee vectoren zijn gelijk als ze dezelfde grootte, richting en zin hebben. Zo geldt op de figuur hiernaast $\overrightarrow{PQ} = \vec{a} = \vec{v}$. Het zijn allemaal *representanten* van dezelfde vector.

b) Bewerkingen met vectoren

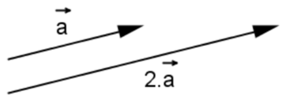
Tegengestelde van een vector

De *tegengestelde van een vector* is de vector met dezelfde grootte en richting maar tegengestelde zin. We noteren de tegengestelde vector van $\vec{a}$ uiteraard als $-\vec{a}$.



Scalair product van een vector met een reëel getal

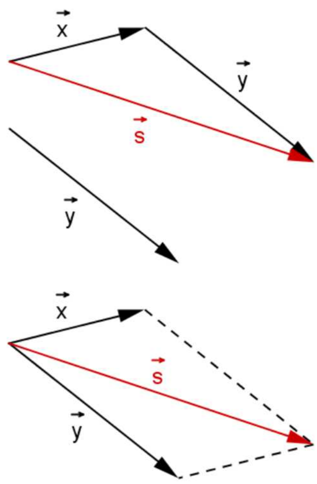
Vermenigvuldigen we een vector met een positief getal dan blijven richting en zin dezelfde maar vermenigvuldigen we de grootte van de vector met dat getal. Bij vermenigvuldiging met een negatief getal draai je de zin om (dus neem je de tegengestelde vector).



Som van twee vectoren

Om de *som van twee vectoren* $\vec{x}$ en $\vec{y}$ te bekomen moet je het beginpunt van $\vec{y}$ naar het eindpunt van $\vec{x}$ te verplaatsen. De som is dan de vector met als beginpunt dat van vector $\vec{x}$ en eindpunt dat van $\vec{y}$. Zo geldt op de figuur hiernaast dat $\vec{s} = \vec{x} + \vec{y}$.

Vaak wordt ook de *parallellogramregel* gebruikt om de som van twee vectoren te construeren. De som van twee vectoren is dan de diagonaal van het parallellogram met als zijden de twee vectoren.



Het is duidelijk dat voor vectoren *de formule van Chasles-Mobius* geldt: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Verschil van twee vectoren

Per definitie stellen we $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + \left(-\vec{y}\right)$

Het begrip reële vectorruimte

Noteren we de verzameling van alle vrije vectoren als $\mathcal{V}$, dan gelden de volgende eigenschappen:

① $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$ (de optelling van vectoren is inwendig)

② $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ (de optelling van vectoren is commutatief)

③ $\exists \vec{o} \in \mathcal{V}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} : \vec{o} + \vec{v} = \vec{v} = \vec{v} + \vec{o}$ (er is een neutraal element voor de optelling van vectoren)

④ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \exists -\vec{v} \in \mathcal{V} : \vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{o}$ (elke vector heeft een symmetrisch element)

⑤ $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathcal{V} : (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$ (de optelling van vectoren is associatief)

⑥ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r.\vec{v} \in \mathcal{V}$ (het scalair product van een vector met een reëel getal is een vector)

⑦ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : r_1.(r_2.\vec{v}) = (r_1.r_2).\vec{v}$ (de scalaire vermenigvuldiging is gemengd associatief)

⑧ $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r.(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = r.\vec{v}_1 + r.\vec{v}_2$

⑨ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : (r_1 + r_2).\vec{v} = r_1.\vec{v} + r_2.\vec{v}$

(de scalaire vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van zowel de optelling in $\mathbb{R}$ als in $\mathcal{V}$)

⑩ $\forall \vec{v} \in \mathcal{V} : 1.\vec{v} = \vec{v} = \vec{v}.1$ (1 is het neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging)

In de wiskunde zeggen we dankzij deze 10 eigenschappen dat $\mathbb{R}, \mathcal{V}, +$ een *reële vectorruimte* is.

c) Coördinaten in de ruimte

Puntvectoren

Kiezen we in de ruimte een willekeurig punt O (dat we *de oorsprong* zullen noemen) dan bepaalt elk punt van de ruimte een gebonden vector $\overrightarrow{OP}$, die we kortweg met $\vec{P}$ zullen noteren.

We kunnen elke vector noteren als verschil van twee puntvectoren, want wegens de formule van Chasles-Mobius geldt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} - \vec{A}$.

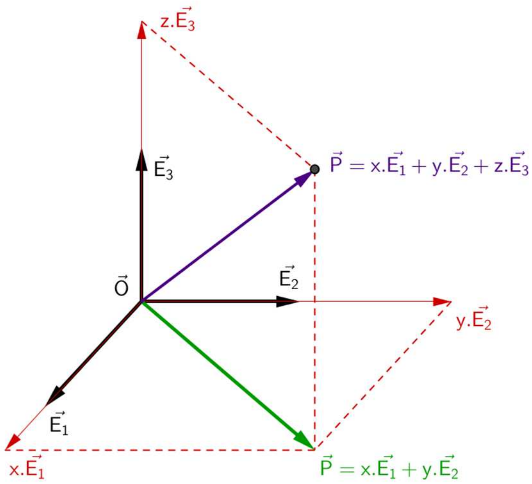
De verzameling van alle puntvectoren noemen we *de ruimte met oorsprong* en we noteren deze verzameling met Σ_O.

Coördinaten

Kiezen we in de ruimte drie puntvectoren $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ en $\vec{E}_3$ in een verschillende richting (die bovendien niet in hetzelfde vlak liggen) dan kunnen we elk punt op een unieke manier schrijven als lineaire combinatie van die drie vectoren. We noemen die drie gekozen vectoren de basisvectoren van het assenstelsel.

Symbolisch: $\forall \vec{P}, \exists x, y, z \in \mathbb{R} : \vec{P} = x.\vec{E}_1 + y.\vec{E}_2 + z.\vec{E}_3$.

We noemen het bijhorende getallentripel (x, y, z) de coördinaat van $\vec{P}$ ten opzichte van het assenstelsel $O\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}_3$, en noteren $co(\vec{P}) = (x, y, z)$.



De rechten OE_1, OE_2 en OE_3 noemen we respectievelijk de x-as, y-as en z-as. Kiezen we de drie basisvectoren $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ en $\vec{E}_3$ onderling loodrecht op elkaar, dan noemen we het assenstelsel orthogonaal. Zijn ze bovendien even groot, dus $\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = \|\vec{E}_3\|$, dan spreken we van een georthonormeerd assenstelsel.

De reële vectorruimte $\mathbb{R},\mathbb{R}^3,+$

Door het invoeren van coördinaten ontstaat er een bijectie (één-één verband) tussen de verzameling vectoren $\mathcal{V}$ en de verzameling reële drietallen $\mathbb{R}^3$. Ook de optelling van vectoren en het scalair product worden overgedragen van $\mathcal{V}$ naar $\mathbb{R}^3$, want:

- Som van twee vectoren $\vec{v}_1,\vec{v}_2 \in \mathcal{V}$, met $co(\vec{v}_1)=(x_1,y_1,z_1)$ en $co(\vec{v}_2)=(x_2,y_2,z_2)$:

  $$\begin{aligned}\vec{v}_1+\vec{v}_2 &= x_1.\vec{E}_1+y_1.\vec{E}_2+z_1.\vec{E}_3+x_2.\vec{E}_1+y_2.\vec{E}_2+z_2.\vec{E}_3\\ &=(x_1+x_2).\vec{E}_1+(y_1+y_2).\vec{E}_2+(z_1+z_2).\vec{E}_3\end{aligned}$$

  Dus $co(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=co(\vec{v}_1)+co(\vec{v}_2)$

- Scalair product van $r\in\mathbb{R}$, met een vector . $\vec{v}\in\mathcal{V}$., met $co(\vec{v})=(x,y,z)$:

  $$r\vec{v}=r\left(x.\vec{E}_1+y.\vec{E}_2+z.\vec{E}_3\right)=rx.\vec{E}_1+ry.\vec{E}_2+rz.\vec{E}_3$$

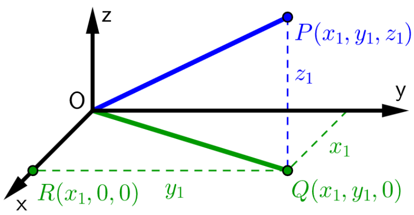
  Dus $co(r\vec{v})=(rx,ry,rz)=r.co(\vec{v})$

We kunnen dus besluiten dat ook $\mathbb{R},\mathbb{R}^3,+$ een reële vectorruimte is.

Opmerking: In plaats van $co(\overrightarrow{P})=(x,y,z)$ te schrijven zullen we vaak de vector en zijn coördinaat aan elkaar gelijkstellen. Dus dan schrijven we simpelweg $\overrightarrow{P}=(x,y,z)$ om de notatie te vereenvoudigen.

Norm van een vector – lengte van een lijnstuk

In een georthonormeerd assenstelsel kunnen we volgende formules in verband met lengtes bewijzen:



Stelling: De norm van een vector $\overrightarrow{P}$ met coördinaat $P(x_1,y_1,z_1)$ wordt gegeven door: $\|\overrightarrow{P}\|=\|\overrightarrow{OP}\|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}$

Bewijs: in $\Delta OQR: |OQ|^2=|OR|^2+|QR|^2=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}$

In $\Delta OPQ: |OP|^2=|OQ|^2+|PQ|^2=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}$ □

Definitie: Een vector met lengte 1 noemen we een eenheidsvector.

Voorbeeld: $\vec{v}\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$ is een eenheidsvector want $\|\vec{v}\|=\sqrt{\frac{4}{49}+\frac{9}{49}+\frac{36}{49}}=1$

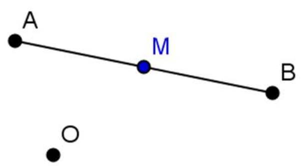
Stelling: Ten opzichte van een georthonormeerd assenstelsel xyz met oorsprong O geldt voor de afstand tussen twee willekeurige punten $P_1(x_1,y_1,z_1)$ en $P_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Bewijs: $|P_1P_2|=\|\overrightarrow{P_1P_2}\|=\|\vec{P}_2-\vec{P}_1\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ □

d) Rekenen met puntvectoren

Midden van een lijnstuk



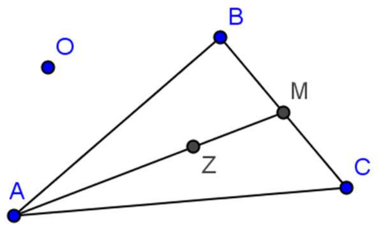
M is het midden van $[AB]$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \vec{M}-\vec{A}=\vec{B}-\vec{M} \Leftrightarrow \vec{M}=\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$$

Dus ook voor de coördinaten geldt:

$$co(\vec{M})=\frac{co(\vec{A})+co(\vec{B})}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Zwaartepunt van een driehoek



Z is het zwaartepunt van ΔABC:

$$\overrightarrow{AZ} = 2.\overrightarrow{ZM} \Leftrightarrow \vec{Z} - \vec{A} = 2\left(\vec{M} - Z\right) \Leftrightarrow 3\vec{Z} = \vec{A} + 2\vec{M}$$

Uit het voorgaande weten we dat $\vec{M} = \dfrac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$, dus

$$3\vec{Z} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \Rightarrow \vec{Z} = \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}.$$

Dus ook: $co\left(\vec{Z}\right) = \dfrac{co\left(\vec{A}\right) + co\left(\vec{B}\right) + co\left(\vec{C}\right)}{3} \Rightarrow Z\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}, \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

3) Analytische affiene ruimtemeetkunde

Om de vergelijkingen van rechten en vlakken op te stellen kunnen we werken in willekeurige assenstelsels. Hier is nog geen sprake van loodrechte stand of afstanden. We noemen dit *affiene ruimtemeetkunde*.

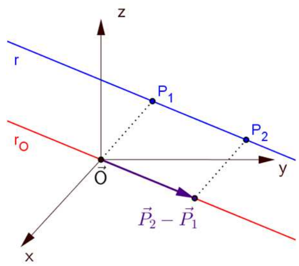
a) De vergelijking van een rechte

Vectorrechte – Richtingsvectoren – Richtingsgetallen

Definitie: Elke rechte r heeft een evenwijdige rechte r_O die door de oorsprong van het assenstelsel gaat, die we de bijhorende *vectorrechte* r_O van die rechte r noemen.

Definitie: Elk punt R van deze vectorrechte r_O verschillend van de oorsprong bepaalt een puntvector $\vec{R}$ die we een *richtingsvector* van de rechte r noemen.

Volgende eigenschappen zijn onmiddellijk duidelijk:

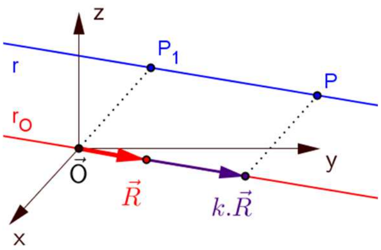


- $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ is een richtingsvector van de rechte P_1P_2.
- Als $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ beide richtingsvectoren zijn van eenzelfde rechte, dan geldt: $\exists k \in \mathbb{R}_0 : \vec{R}_1 = k.\vec{R}_2$.
- Evenwijdige rechten bepalen dezelfde vectorrechte en hebben dus dezelfde richtingsvectoren.

De coördinaat van een richtingsvector $\vec{R}$ van r noemen we een stel *richtingsgetallen* van r. Het is duidelijk dat richtingsgetallen van een rechte slechts op een evenredigheidsfactor na bepaald zijn, net zoals richtingsvectoren. De vorige drie eigenschappen kunnen dus ook geformuleerd worden als volgt:

- Als $P_1(x_1, y_1, z_1) \in r$ en $P_2(x_2, y_2, z_2) \in r$ dan is $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ een stel richtingsgetallen van r.
- (a_1, b_1, c_1) en (a_2, b_2, c_2) zijn twee stellen richtingsgetallen van eenzelfde rechte $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 : (a_1, b_1, c_1) = k.(a_2, b_2, c_2)$, of dus nog $a_1 = k.a_2 \ \wedge \ b_1 = k.b_2 \ \wedge \ c_1 = k.c_2$.
- Richtingsgetallen van evenwijdige rechten zijn gelijk op een evenredigheidsfactor na.

Vectorvergelijking van een rechte



Beschouw nu een rechte r waarvan een punt P_1 en een richtingsvector $\vec{R}$ gegeven zijn. De vector $\vec{P}_1$ noemen we een plaatsvector van rechte r.

Uit de figuur links blijkt dat we elke puntvector $\vec{P}$ van een punt P van de rechte r kunnen schrijven als:

$$r \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k.\vec{R}, \text{ met } k \in \mathbb{R}.$$

Dit heet een *vectorvergelijking* van rechte r.

Parametervergelijking van een rechte

Veranderen we in de vectorvergelijking de vectoren door de coördinaten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $R(a, b, c)$ en $P(x, y, z)$, dan vinden we: $r \leftrightarrow (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k.(a, b, c)$.

Dit kan ook geschreven worden als $r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k.a \\ y = y_1 + k.b \\ z = z_1 + k.c \end{cases}$ of met matrices: $r \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Dit noemen we een *parametervergelijking* van rechte r.

Stelsel cartesische vergelijkingen van een rechte

Elimineren we parameter k uit het stelsel parametervergelijkingen hierboven dan vinden we vrijwel onmiddellijk dat: $r \leftrightarrow \dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$. Dit noemen we een *stelsel cartesische vergelijkingen* van de rechte r. Merk op dat hier moet gelden dat $abc \neq 0$.

Als een van de richtingsgetallen 0 is, kan je als volgt te werk gaan (we nemen als voorbeeld $a=0$):

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + k.b \\ z = z_1 + k.c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c} \end{cases}$$

Zijn twee van de richtingsgetallen 0, dan kan het als volgt (we nemen als voorbeeld $a=b=0$):

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + k.c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

Opmerking: Elke rechte wordt dus bepaald door een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in x, y en/of z (we zullen later zien dat dit twee vlakken zijn die die rechte als snijlijn hebben).

Voorbeeld 1: Bepaal een parametervergelijking en een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte r door de punten $Q(1,2,3)$ en $R(3,-2,4)$.

Als richtingsvector nemen we $\vec{Q}-\vec{R}$, dan hebben we als stel richtingsgetallen $(-2,4,-1)$. Als plaatsvector kiezen we voor Q (maar R had evengoed gekund). Dan krijgen we:

$$r \leftrightarrow \begin{cases} x = 1-2k \\ y = 2+4k \\ z = 3-k \end{cases} \Leftrightarrow r \leftrightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

Dit kan ook geschreven worden als: $r \leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ y+4z-14=0 \end{cases}$

Voorbeeld 2: Bepaal een stelsel cartesische vergelijkingen van de rechte s met richtingsvector $\vec{R}(1,-2,0)$ die door punt $S(4,-7,1)$ gaat.

We vinden direct: $r \leftrightarrow \begin{cases} x = 4+k \\ y = -7-2k \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r \leftrightarrow \begin{cases} x-4 = \dfrac{y+7}{-2} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r \leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ z=1 \end{cases}$

Onderlinge ligging van twee rechten

Om de ligging te bepalen van twee rechten wiens vergelijking je kent (of kan opstellen) kan je als volgt te werk gaan:

1) Ga na of de rechten evenwijdig zijn (dus of de richtingsgetallen een veelvoud van elkaar zijn)
2) Als ze evenwijdig zijn kunnen ze eventueel samenvallen. Dat kan je controleren door een punt van de ene rechte in te vullen in een vergelijking van een andere rechte.
3) Zijn ze niet evenwijdig dan moet je op zoek gaan naar een eventueel snijpunt. Daartoe moet je een stelsel oplossen. Is dit stelsel strijdig dan zijn het kruisende rechten. Heeft dit stelsel een unieke oplossing dan is de oplossing het snijpunt van de twee rechten.

Voorbeeld 1: Onderzoek de ligging van $r_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1-3k \\ y = 2+3k \\ z = -4+4k \end{cases}$ en $r_2 \leftrightarrow \dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{-3}$.

De rechten zijn niet evenwijdig want $\forall k \in \mathbb{R} : (-3,3,4) \neq k(-5,4,-3)$.

Vullen we de vergelijking van r_1 in bij r_2 dan vinden we: $\dfrac{1-3k-3}{-5} = \dfrac{2+3k-1}{4} = \dfrac{-4+4k-3}{-3}$.

Dit stelsel heeft de unieke oplossing $k = 1$. De rechten snijden elkaar dus in punt $S(-2,5,0)$.

b) De vergelijking van een vlak

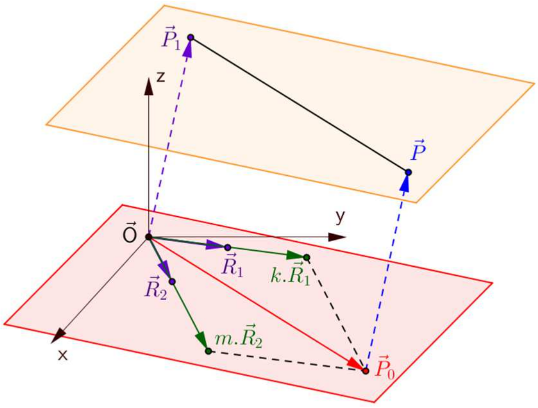
Vectorvlak – Richtingsvectoren – Richtingsgetallen

Definitie: Elk vlak α heeft een evenwijdig vlak α_O dat door de oorsprong van het assenstelsel gaat. We noemen dit vlak α_O het bijhorende *vectorvlak* bij dat vlak α.

Definitie: Neem je in het vectorvlak α_O van een vlak α twee verschillende vectoren $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ zodat $O \notin R_1R_2$, dan noemen we $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ een *stel richtingsvectoren* van het vlak α.

Opmerking: Er geldt dus dat $\forall k \in \mathbb{R} : \vec{R}_1 \neq k.\vec{R}_2$. We zeggen dat de vectoren $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ *lineair onafhankelijk* zijn. Analoog aan de richtingsgetallen van een rechte kunnen we nu de coördinaten van twee richtingsvectoren definiëren als twee stellen richtingsgetallen van een vlak.

Vectorvergelijking van een vlak



Beschouw nu een vlak α waarvan een plaatsvector $\vec{P}_1$ (dus $P_1 \in \alpha$) en twee richtingsvectoren $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$ gegeven zijn.

Uit de figuur links blijkt dat we elke puntvector $\vec{P}$ van een punt P van het vlak α kunnen schrijven als:

$$\alpha \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_0, \text{ met } P_0 \in \alpha_0 .$$

Elke puntvector $\vec{P}_0$ van α_0 kunnen we schrijven als lineaire combinatie van $\vec{R}_1$ en $\vec{R}_2$:

$$\exists k, m \in \mathbb{R} : \vec{P}_0 = k.\vec{R}_1 + m.\vec{R}_2 .$$

Brengen we deze twee vergelijkingen samen dan krijgen we: $\alpha \leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + k.\vec{R}_1 + m.\vec{R}_2$. We noemen dit de vectorvergelijking van het vlak α.

Parametervergelijking van een vlak

Veranderen we in de vectorvergelijking de vectoren door de coördinaten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $R_1(a_1, b_1, c_1)$, $R_2(a_2, b_2, c_2)$ en $P(x, y, z)$, dan geldt:

$$\alpha \leftrightarrow (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k.(a_1, b_1, c_1) + m.(a_2, b_2, c_2) .$$

Dit kan je schrijven als $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + k.a_1 + m.a_2 \\ y = y_1 + k.b_1 + m.b_2 \\ z = z_1 + k.c_1 + m.c_2 \end{cases}$ of met matrices $r \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + m \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

Cartesische vergelijking van een vlak

De parametervergelijking omvormen tot een cartesiaanse vergelijking kan door de parameters k en m te elimineren uit het stelsel. De eliminatievoorwaarde die we vinden zal altijd een eerstegraadsvergelijking zijn in x, y en z.

Voorbeeld: Bepaal de vergelijkingen van het vlak α door punt $P_1(1,3,-2)$ met richtingsvectoren $R_1(-1,4,-3)$ en $R_2(2,-7,4)$.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1-k+2m \\ y = 3+4k-7m \\ z = -2-3k+4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1-x+2m \\ y = 3+4(1-x+2m)-7m \\ z = -2-3k+4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7x+2y-13 \\ m = 4x+y-7 \\ z = -2-3(7x+2y-13)+4(4x+y-7) \end{cases}$$

De onderste vergelijking vereenvoudigen geeft: $5x+2y+z-9=0$. Dit is dus de cartesische vergelijking van het vlak α. We kunnen deze op een veel snellere manier opstellen met behulp van een *determinant*.

Determinantvergelijking van een vlak

We hernemen de parametervergelijking van een vlak α met twee richtingsvectoren $R_1(a_1,b_1,c_1)$ en $R_2(a_2,b_2,c_2)$ en een punt $P(x_1,y_1,z_1)$:

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = k.a_1 + m.a_2 + x_1 \\ y = k.b_1 + m.b_2 + y_1 \\ z = k.c_1 + m.c_2 + z_1 \end{cases} \text{ of nog } \begin{cases} k.a_1 + m.a_2 = x - x_1 \\ k.b_1 + m.b_2 = y - y_1 \\ k.c_1 + m.c_2 = z - z_1 \end{cases}, \text{ met } k,m \in \mathbb{R}.$$

Uit de cursus determinanten weten we dat dit 3×2-stelsel een oplossing zal hebben voor $k,m \in \mathbb{R}$ als en slechts als de rang van de uitgebreide coëfficiëntenmatrix 2 is.

Omdat de rang van $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ sowieso 2 is (anders zijn de richtingsvectoren lineair afhankelijk), zal de rang van de uitgebreide coëfficiëntenmatrix 2 zijn als en slechts als hij singulier is, dus als en slechts als

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x-x_1 \\ b_1 & b_2 & y-y_1 \\ c_1 & c_2 & z-z_1 \end{vmatrix} = 0$, wat meestal (getransponeerd) wordt geschreven als $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$.

Opmerking: We hebben nu eigenlijk bewezen dat de vergelijking van elk vlak kan geschreven worden in de vorm $ux+vy+wz+t=0$, een eerstegraadsvergelijking in de onbekenden x,y en z.

Onderlinge ligging van twee vlakken

Beschouw twee vlakken $\alpha \leftrightarrow u_1x+v_1y+w_1z+t_1=0$ en $\beta \leftrightarrow u_2x+v_2y+w_2z+t_2=0$.

Om eventuele snijpunten te zoeken moet we dus het stelsel $\begin{cases} u_1x+v_1y+w_1z+t_1=0 \\ u_2x+v_2y+w_2z+t_2=0 \end{cases}$ oplossen.

Als de vergelijkingen een veelvoud zijn van elkaar dan is het duidelijk dat de vlakken samenvallen.
Dat is dus als en slechts als: $\exists k \in \mathbb{R}_0 : u_1 = k.u_2 \wedge v_1 = k.v_2 \wedge w_1 = k.w_2 \wedge t_1 = k.t_2$

Als dit stelsel geen oplossing heeft dan zijn de vlakken evenwijdig. Dit kan enkel als en slechts als: $\exists k \in \mathbb{R}_0 : u_1 = k.u_2 \wedge v_1 = k.v_2 \wedge w_1 = k.w_2 \wedge t_1 \neq k.t_2$

In alle andere gevallen zullen de twee vlakken α en β elkaar snijden in een rechte. We hebben echter al gezien dat we een rechte kunnen schrijven als een stelsel cartesische vergelijkingen van de eerste orde. In dit geval kan je dus de rechte dus interpreteren als de snijlijn van die twee vlakken.

Gevolgen:

- Als je t laat variëren in de vergelijking $ux+vy+wz+t=0$ dan krijg je allemaal evenwijdige vlakken.
- Als een vlak $\alpha \leftrightarrow ux+vy+wz+t=0$ gegeven is dan vind je de vergelijking van het bijhorende vectorvlak door $t=0$ te stellen: $\alpha_0 \leftrightarrow ux+vy+wz=0$.

Voorbeeld: Bepaal een richtingsvector en een plaatsvector van de snijlijn van de twee vlakken $\alpha \leftrightarrow x+2y+3z-6=0$ en $\beta \leftrightarrow 4x-2y-z-1=0$.

We lossen dus het bijhorende stelsel op (kan ook eventueel met behulp van de GRM):

$$\begin{cases} x+2y+3z-6=0 \\ 4x-2y-z-1=0 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=7/5-2/5\,.\,k \\ y=23/10-13/10\,.\,k \\ z=k \end{cases}$$

*: de matrix $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$ herleiden tot de rijcanonieke vorm geeft: $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 13/10 & 23/10 \end{array}\right]$.

Een richtingsvector van de snijlijn is $\vec{R}(-2/5,-13/10,1)$ en een plaatsvector is $\vec{P}(7/5,23/10,0)$.

Je weet dat een richtingsvector slechts op een veelvoud na bepaald is, dus ook $\vec{R}\,'(4,13,-10)$ kan.

Opmerking: Een richtingsvector van de snijlijn van twee vlakken kan je ook sneller vinden:
De vectorrechte van de snijlijn is de snijlijn van de vectorvlakken. We hernemen even het vorige voorbeeld:

De oplossingen van het homogene 2×3-stelsel $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x-2y-z=0 \end{cases}$ zijn de richtingsgetallen van de snijlijn.

Met behulp van determinanten vinden we $V=\left\{\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\cdot\lambda, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\cdot\lambda, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\cdot\lambda\right), \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

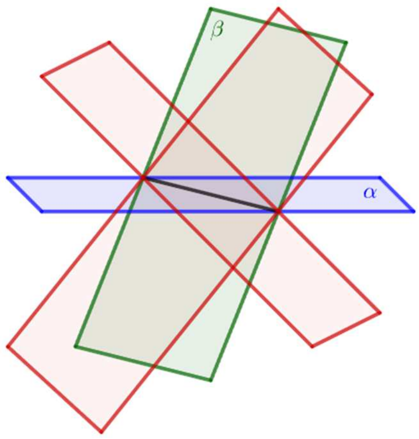
Stellen we hierin $\lambda=1$, dan vinden we (veel sneller) de richtingsvector $\vec{R}\,'(4,13,-10)$.

Vlakkenwaaiers

Een vlakkenwaaier is de verzameling van alle vlakken die door eenzelfde rechte gaan.
Stel dat s de snijlijn is van de vlakken α en β, dus:

$$s \leftrightarrow \begin{cases} u_1x+v_1y+w_1z+t_1=0 & (\leftrightarrow \alpha) \\ u_2x+v_2y+w_2z+t_2=0 & (\leftrightarrow \beta) \end{cases}.$$

Elk vlak dat s omvat kan dan geschreven worden als:
$k(u_1x+v_1y+w_1z+t_1)+m(u_2x+v_2y+w_2z+t_2)=0$, met $k,m\in\mathbb{R}$.
We noemen dit de vergelijking van de vlakkenwaaier door rechte s.



Voorbeeld: Stel de vergelijking op van het vlak door $s \leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z+5$ dat $P(1,2,-5)$ bevat.

We gebruiken de vlakkenwaaier door s : $\alpha \leftrightarrow k(3x-2y-3)+m(y-3z-15)=0$, met $k,m\in\mathbb{R}$.

$P\in\alpha \Leftrightarrow k(3.1-2.2-3)+m(2-3.(-5)-15)=0 \Leftrightarrow -4k+2m=0$. Kies dus bvb.: $k=1$, $m=2$,

dan wordt: $\alpha \leftrightarrow 1.(3x-2y-3)+2.(y-3z-15)=0$, wat je kan schrijven als $\alpha \leftrightarrow x-2z-11=0$.

c) Onderlinge ligging van rechten en vlakken

De onderlinge ligging van een rechte en een vlak is heel eenvoudig te bepalen door het bijhorende stelsel op te lossen (altijd te herleiden tot 3 lineaire vergelijkingen in x, y en z).
Als dit stelsel geen oplossingen heeft (als het vals is) dan is de rechte strikt evenwijdig met het vlak.
Als dit stelsel oneindig veel oplossingen heeft (als het onbepaald is) dan ligt de rechte in het vlak.
Als dit stelsel een unieke oplossing heeft dan is deze oplossing het snijpunt van de rechte met dat vlak.

Voorbeeld 1: Bepaal het snijpunt van $\alpha \leftrightarrow 2x-4y+3z-1=0$ met $r \leftrightarrow x-3=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-1}{2}$.

$$\begin{cases} 2x-4y+3z-1=0 \\ 3(x-3)=y-4 \\ 2(y-4)=3(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ 3x-y=5 \\ 2y-3z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow$$ het snijpunt is dus $P(1,-2,-3)$.

Voorbeeld 2: Bewijs dat de rechte r met richtingsvector $\vec{R}(7,-5,-1)$ en plaatsvector $\vec{P}(1,8,-3)$ strikt evenwijdig is met het vlak $\alpha \leftrightarrow x+2y-3z+5=0$.

We zouden dit kunnen oplossen door eerst een stelsel cartesische vergelijkingen te zoeken van r, maar het is eenvoudiger aan te tonen dat $\vec{R} \in \alpha_0$ (want dan is $r // \alpha$) en $\vec{P} \notin \alpha$ (strikt evenwijdig).

$\vec{R} \in \alpha_0$ want $7+2.(-5)-3.(-1)=0$ en $\vec{P} \notin \alpha$ want $1+2.8-3.(-3)+5 \neq 0$.

4) Analytische Euclidische ruimtemeetkunde

In de affiene ruimte zijn de begrippen loodrechte stand en afstand niet gedefinieerd. Van zodra deze begrippen worden ingevoerd is het noodzakelijk om in een georthonormeerd assenstelsel te werken. We noemen een affiene ruimte waar bovendien een inproduct gedefinieerd is een *Euclidische ruimte*.

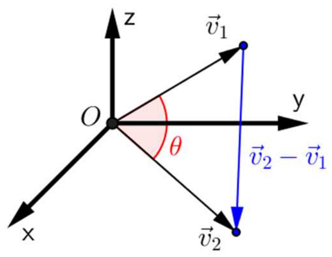
a) Loodrechte stand in de Euclidische ruimte

Het inproduct van twee vectoren

Definitie: In een georthonormeerd assenstelsel definiëren we het *inproduct van twee vectoren* $\vec{v}_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ en $\vec{v}_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ als $\vec{v}_1.\vec{v}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Noteren we nu met $\mathcal{V}_{\vec{o}}$ de verzameling van vectoren verschillend van de nulvector, dan geldt:

Stelling: $\forall \vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathcal{V}_{\vec{o}}:\vec{v}_1.\vec{v}_2=\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\left(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2}\right)$, met $\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2}$ de ingesloten hoek van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.



Bewijs: In de driehoek opgespannen door de vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_2-\vec{v}_1$, geldt de cosinusregel, met $\theta=\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2}$: $\|\vec{v}_2-\vec{v}_1\|^2=\|\vec{v}_1\|^2+\|\vec{v}_2\|^2-2.\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\theta$, dus $2.\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\theta=\|\vec{v}_1\|^2+\|\vec{v}_2\|^2-\|\vec{v}_2-\vec{v}_1\|^2$.

(Merk op dat de cosinusregel ook geldt in het geval dat $\theta=0°$ of $\theta=180°$, dus als $\overrightarrow{v_1}$ een veelvoud zou zijn van $\overrightarrow{v_2}$).

Met behulp van de afstandsformule die we net bewezen hebben kunnen we dit vereenvoudigen tot:

$$2.\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\theta=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}+x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}-\left(\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2\right)$$

$=2x_1x_2+2y_1y_2+2z_1z_2$, waaruit onmiddellijk de gezochte formule volgt. □

Eigenschappen: In verband met het inproduct geldt het volgende:

- $\forall\vec{v}\in\mathcal{V}:\vec{v}.\vec{o}=\vec{o}.\vec{v}=0$
- $\forall\vec{v}\in\mathcal{V}_{\vec{o}}:\vec{v}.\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$
- $\forall\vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathcal{V}:\vec{v}_1.\vec{v}_2=\vec{v}_2.\vec{v}_1$
- $\forall\vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathcal{V}_{\vec{o}}:\vec{v}_1\perp\vec{v}_2\Leftrightarrow\vec{v}_1.\vec{v}_2=0$

Bewijs:
- Stel $\vec{v}\left(x_1,y_1,z_1\right)$ dan geldt: $\vec{v}.\vec{o}=x_1\cdot0+y_1\cdot0+z_1\cdot0=0$. Analoog is ook $\vec{o}.\vec{v}=0$.
- Stel $\vec{v}\left(x_1,y_1,z_1\right)$ dan geldt: $\vec{v}.\vec{v}=x_1\cdot x_1+y_1\cdot y_1+z_1\cdot z_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2=\|\vec{v}\|$.
- Stel $\vec{v}_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ en $\vec{v}_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ dan is $\vec{v}_1.\vec{v}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1=\vec{v}_2.\vec{v}_1$.
- $\vec{v}_1.\vec{v}_2=0\Leftrightarrow\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos\left(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2}\right)=0\Leftrightarrow\cancel{\|\vec{v}_1\|=0}\vee\cancel{\|\vec{v}_2\|=0}\vee\cos\left(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2}\right)=0\Leftrightarrow\vec{v}_1\perp\vec{v}_2$. □

Loodrechte stand van twee rechten

Stelling: Twee rechten r_1 en r_2 met richtingsvectoren $\vec{R}_1\left(a_1,b_1,c_1\right)$ en $\vec{R}_2\left(a_2,b_2,c_2\right)$ staan loodrecht op elkaar als en slechts $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

Bewijs: $r_1\perp r_2\Leftrightarrow\vec{R}_1\perp\vec{R}_2\Leftrightarrow\vec{R}_1.\vec{R}_2=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$. □

Opmerking: Deze rechten kunnen loodrecht snijden *of* loodrecht kruisen.

Normaalvectoren van vlakken

Definitie: Een *normaalvector* $\overrightarrow{n_a}$ van een vlak α is een vector (verschillend van de nulvector) die loodrecht staat op dat vlak.

Stelling: $\vec{N}(u,v,w)$ is een normaalvector van vlak $\alpha \leftrightarrow ux+vy+wz+t=0$.

Bewijs: $\vec{N}\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{N}\perp\alpha_0$ (met α_0 het vectorvlak van α, dus $\alpha_0 \leftrightarrow ux+vy+wz=0$ en $\alpha // \alpha_0$).

$\Leftrightarrow \vec{N}\perp\vec{P}$, $\forall\vec{P}\in\alpha_0$ (definitie van loodrechte stand)

$\Leftrightarrow \vec{N}.\vec{P}=0$ (eigenschap scalair product)

$\Leftrightarrow ux_0+vy_0+wz_0=0$, met $\vec{P}(x_0,y_0,z_0)$

Dit laatste klopt sowieso omdat $P\in\alpha_0$. □

Voorbeeld: Stel de vergelijking op van de loodlijn op $\alpha \leftrightarrow 2x-y+3z+5=0$ die door punt $P(0,1,2)$ gaat.

Dit is de rechte met richtingsvector $\overrightarrow{n_\alpha}(2,-1,3)$ en plaatsvector $\vec{P}(0,1,2)$: $r \leftrightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Loodrechte stand van vlakken

Stelling: Als $\alpha \leftrightarrow u_1x+v_1y+w_1z+t_1=0$ en $\beta \leftrightarrow u_2x+v_2y+w_2z+t_2=0$, dan geldt:

$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow u_1.u_2+v_1.v_2+w_1.w_2=0$.

Bewijs: Noem $\vec{N_1}(u_1,v_1,w_1)$ en $\vec{N_2}(u_2,v_2,w_2)$ de normaalvectoren van beide vlakken. We weten:

$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \vec{N_1}\perp\vec{N_2} \Leftrightarrow u_1.u_2+v_1.v_2+w_1.w_2=0$ (zie ook stelling ❿). □

Het uitproduct van twee vectoren

Definitie: Ten opzichte van een orthonormale ijk $O\overrightarrow{E_1}\overrightarrow{E_2}\overrightarrow{E_3}$ definiëren we het uitproduct van twee vectoren $\vec{R_1}(a_1,b_1,c_1)$ en $\vec{R_2}(a_2,b_2,c_2)$ als $\overrightarrow{R_1}\times\overrightarrow{R_2}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{E_1}-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{E_2}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{E_3}$.

Stelling: Het uitproduct van twee lineair onafhankelijke vectoren staat loodrecht op die beide vectoren.

Bewijs: $\overrightarrow{R_1}\cdot\left(\overrightarrow{R_1}\times\overrightarrow{R_2}\right)=a_1\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2\end{vmatrix}-b_1\cdot\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2\end{vmatrix}+c_1\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=0$,

zodat inderdaad $\overrightarrow{R_1}\perp\overrightarrow{R_1}\times\overrightarrow{R_2}$. Volledig analoog bewijs je ook dat $\overrightarrow{R_2}\perp\overrightarrow{R_1}\times\overrightarrow{R_2}$. □

Eigenschappen: In verband met het uitproduct geldt het volgende:

- $\forall\vec{v}\in\mathcal{V}: \vec{v}\times\vec{o}=\vec{o}\times\vec{v}=\vec{o}$
- $\forall\vec{v}\in\mathcal{V}: \vec{v}\times\vec{v}=\vec{o}$
- $\forall\vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathcal{V}: \vec{v}_1\times\vec{v}_2=-\vec{v}_2\times\vec{v}_1$

Bewijs: Deze eigenschappen volgen onmiddellijk uit de eigenschappen voor determinanten.

b) Afstanden in de Euclidische ruimte

Afstand van een punt tot een rechte

Voorbeeld: Bepaal de afstand van punt $P(1,2,3)$ tot rechte $r \leftrightarrow \dfrac{x-2}{2}=y+1=\dfrac{z-3}{-4}$.

We noemen α het vlak dat loodrecht staat op r en door P gaat:

$\alpha \leftrightarrow 2(x-1)+(y-2)-4(z-3)=0$, of eenvoudiger: $\alpha \leftrightarrow 2x+y-4z+8=0$.

Het snijpunt van α en r is $P'(44/21,-20/21,59/21)$: $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 4y+z+1=0 \\ 2x+y-4z+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=44/21 \\ y=-20/21 \\ z=59/21 \end{cases}$.

Dus $d(P,r)=|PP'|=\sqrt{(44/21-1)^2+(-20/21-2)^2+(59/21-3)^2}=\sqrt{209/21}$.

Afstand van een punt tot een vlak

Stelling: Zij $\alpha \leftrightarrow ux+vy+wz+t=0$ en $P(x_1,y_1,z_1)$, dan geldt: $d(\alpha,P)=\dfrac{|ux_1+vy_1+wz_1+t|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$.

Bewijs: Noem l de loodlijn uit P op α, dan geldt: $l \leftrightarrow \begin{cases} x=x_1+k.u \\ y=y_1+k.v \\ z=z_1+k.w \end{cases}$.

Er is dus een $k'\in\mathbb{R}$ zodat $P'(x_1+k'.u, y_1+k'.v, z_1+k'.w)\in\alpha$. Voor dit punt geldt:

$$|PP'|=\sqrt{(x_1+k'.u-x_1)^2+(y_1+k'.v-y_1)^2+(z_1+k'.w-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{k'^2\cdot u^2+k'^2\cdot v^2+k'^2\cdot w^2}=\sqrt{k'^2(u^2+v^2+w^2)}=|k'|.\sqrt{u^2+v^2+w^2}.$$

Anderzijds geldt: $P'\in\alpha \Leftrightarrow u(x_1+k'.u)+v(y_1+k'.v)+w(z_1+k'.w)+t=0$

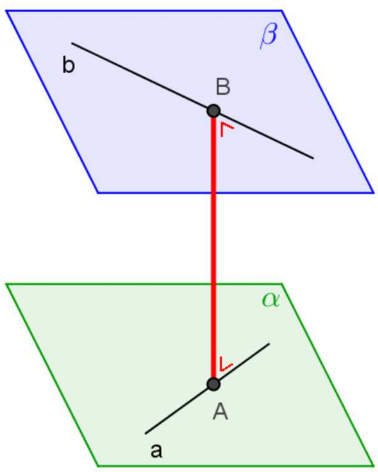
$$\Leftrightarrow ux_1+vy_1+wz_1+t+k'(u^2+v^2+w^2)=0 \Leftrightarrow k'=-\frac{ux_1+vy_1+wz_1+t}{u^2+v^2+w^2}$$

Zodat $|PP'|=\left|-\dfrac{ux_1+vy_1+wz_1+t}{u^2+v^2+w^2}\right|.\sqrt{u^2+v^2+w^2}=\dfrac{|ux_1+vy_1+wz_1+t|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$ □

Voorbeeld: Bepaal de afstand van vlak $\alpha \leftrightarrow 2x-y+3z+5=0$ tot punt $P(0,1,2)$.

$$d(\alpha,P)=\frac{|2.0-1+3.2+5|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{7}.$$

Gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende rechten



Het is duidelijk dat elk paar kruisende rechten juist één gemeenschappelijke loodlijn heeft. Het is de kortste verbinding tussen de beide rechten.

Op de figuur hiernaast is AB de gemeenschappelijke loodlijn van de rechten a en b.

Op de figuur staat een *verpakking* getekend van de kruisende rechten. Dit zijn twee vlakken α en β zodat $a\subset\alpha$ en $b\,//\,\alpha$, en $b\in\beta$ en $a\,//\,\beta$.

De afstand tussen de kruisende rechten is dus ook gelijk aan de afstand tussen de vlakken van hun verpakking.

Voorbeeld 1: Bepaal een vergelijking van de gemeenschappelijk loodlijn en de kortste afstand tussen de rechten a met richtingsvector $\vec{R}_a(3,4,1)$ door punt $P_a(7,12,0)$ en b met richtingsvector $\vec{R}_b(3,-2,-2)$ door punt $P_b(6,-1,2)$.

Elk punt van rechte a kan dus geschreven worden als $A\left(7+3k_1,12+4k_1,k_1\right)$, en elk punt van rechte b kan geschreven worden als $B\left(6+3k_2,-1-2k_2,2-2k_2\right)$. Voor de vector $\overrightarrow{AB}$ geldt dan:

$co\left(\overrightarrow{AB}\right)=co\left(\vec{B}\right)-co\left(\vec{A}\right)=\left(-3k_1+3k_2-1,-4k_1-2k_2-13,-k_1-2k_2+2\right)$.

$\overrightarrow{AB}\perp a \Leftrightarrow 3.\left(-3k_1+3k_2-1\right)+4.\left(-4k_1-2k_2-13\right)+1.\left(-k_1-2k_2+2\right)=0 \Leftrightarrow -26k_1-k_2-53=0$

$\overrightarrow{AB}\perp b \Leftrightarrow 3.\left(-3k_1+3k_2-1\right)-2.\left(-4k_1-2k_2-13\right)-2.\left(-k_1-2k_2+2\right)=0 \Leftrightarrow k_1+17k_2+19=0$

Lossen we beide vergelijkingen op naar k_1 en k_2 dan vinden we $k_1=-2$ en $k_2=-1$.

Zo vinden we dus de coördinaten $A\left(1,4,-2\right)$ en $B\left(3,1,4\right)$, en voor de richting $\overrightarrow{AB}\left(2,-3,6\right)$.

Als vergelijking voor de gemeenschappelijke loodlijn krijgen we dus $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{6}$.

Voor de kortste afstand tussen a en b geldt: $d\left(a,b\right)=\left|AB\right|=\sqrt{4+9+36}=7$.

Alternatieve methode voor de kortste afstand:

Noem α het vlak zodat $a\subset\alpha$ en $b//\alpha$, dan geldt: $\alpha\leftrightarrow\begin{vmatrix} x-7 & y-12 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0$.

Dit geeft: $\alpha\leftrightarrow -6x+9y-18z-66=0$ of eenvoudiger $\alpha\leftrightarrow 2x-3y+6z+22=0$.

Dan geldt: $d\left(a,b\right)=d\left(\alpha,P_b\right)=\frac{\left|2.6-3.\left(-1\right)+6.2+22\right|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{49}{7}=7$.

Deze methode is veel sneller maar geeft geen inzicht over de richting van AB.

c) Hoeken in de Euclidische ruimte

De hoek tussen twee rechten

In een georthonormeerd assenstelsel is een hoek tussen twee rechten r_1 en r_2 gelijk aan de hoek tussen de richtingsvectoren. Dus geldt voor twee rechten met als richting $\vec{R}_1\left(a_1,b_1,c_1\right)$ en $\vec{R}_2\left(a_2,b_2,c_2\right)$:

$$\cos\left(\widehat{\vec{R}_1,\vec{R}_2}\right)=\frac{\vec{R}_1.\vec{R}_2}{\left\|\vec{R}_1\right\|.\left\|\vec{R}_2\right\|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}.\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}.$$

Beperken we de hoek tussen rechten tot scherpe of rechte hoeken ($\cos\theta\geq 0$), dan wordt dit:

$$\cos\left(\widehat{r_1,r_2}\right)=\left|\cos\left(\widehat{\vec{R}_1,\vec{R}_2}\right)\right|=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}.\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}\quad\square$$

Voorbeeld: bepaal de hoek tussen $a\leftrightarrow\frac{x+5}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-5}$ en $b\leftrightarrow\begin{cases}4x-2y+5=0\\ z=4\end{cases}$.

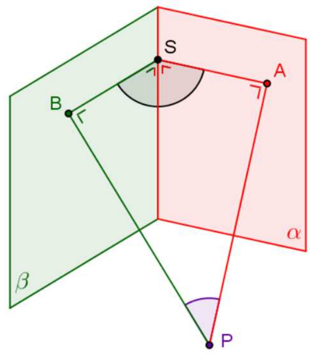
Twee richtingsvectoren voor deze rechten zijn: $\vec{R}_a\left(2,3,-5\right)$ en $\vec{R}_b\left(2,4,0\right)$, zodat dus geldt:

$$\cos\left(\widehat{a,b}\right)=\frac{\left|2.2+3.4-5.0\right|}{\sqrt{2^2+3^2+\left(-5\right)^2}.\sqrt{2^2+4^2+0^2}}=\frac{16}{\sqrt{38}.\sqrt{20}}\Rightarrow\left(\widehat{a,b}\right)\approx 54°31'22''.$$

De hoek tussen twee snijdende vlakken

Stelling: Als $\alpha\leftrightarrow u_1x+v_1y+w_1z+t_1=0$ en $\beta\leftrightarrow u_2x+v_2y+w_2z+t_2=0$, dan geldt:

$$\cos\left(\widehat{\alpha\beta}\right)=\frac{\left|u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2\right|}{\sqrt{u_1^{\,2}+v_1^{\,2}+w_1^{\,2}}.\sqrt{u_2^{\,2}+v_2^{\,2}+w_2^{\,2}}}.$$



Bewijs: Neem een punt P dat niet op α, noch op β ligt.

Noem A de loodrechte projectie van P op α en B de loodrechte projectie van P op β.

Noem S het snijpunt van vlak $\gamma = vl(P, A, B)$ met de snijlijn s van α en β.

$$\left.\begin{array}{l} PA \perp \alpha \Rightarrow PA \perp s \\ PB \perp \beta \Rightarrow PB \perp s \end{array}\right\} \Rightarrow s \perp \gamma \Rightarrow s \perp SA \ \wedge \ s \perp SB.$$

Per definitie geldt dus dat $\widehat{\alpha\beta} = \left(\widehat{AS, SB}\right) \overset{\text{suppl.}}{=} \left(\widehat{AP, PB}\right)$.

(verklaring voor de laatste gelijkheid: de hoeken $\widehat{ASB}$ en $\widehat{APB}$ zijn supplementair in omdat in vierhoek $PBSA$ geldt dat $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, en de hoek tussen twee rechten is sowieso scherp of recht).

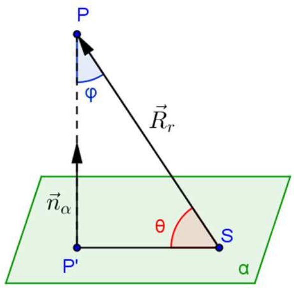
De normaalvector van α is evenwijdig met PA en de normaalvector van β is evenwijdig met PB, zodat inderdaad geldt dat $\widehat{\alpha\beta} = \left(\widehat{\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta}\right)$. □

Voorbeeld: bepaal de hoek tussen de vlakken $\alpha \leftrightarrow 2x + 4y - 5z + 1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 3x + 5z = 0$.

$$\cos\left(\widehat{\alpha\beta}\right) = \frac{|2.3 + 4.0 - 5.5|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-5)^2}.\sqrt{3^2 + 0^2 + 5^2}} = \frac{19}{\sqrt{45}.\sqrt{34}} \Rightarrow \left(\widehat{\alpha\beta}\right) \approx 60°56'19''$$

De hoek tussen een rechte en een vlak

Stelling: Als gegeven zijn een vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ en een rechte r (die α snijdt) met richtingsvector $\vec{R}_r(a, b, c)$, dan geldt: $\sin\left(\widehat{\alpha, r}\right) = \dfrac{|ua + vb + wc|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.



Bewijs: Per definitie is de hoek tussen een rechte en een vlak de hoek die gevormd wordt door het vlak en de loodrechte projectie van de rechte op dat vlak.

Neem een punt P op rechte r zodat $\overrightarrow{SP} = \vec{R}_r$, waarbij S het snijpunt is van α en r.

Noem P' de loodrechte projectie van P op α. Dan is dus PP' evenwijdig met elke normaalvector $\vec{n}_\alpha$ van vlak α.

In driehoek $\Delta SPP'$ geldt $\left(\widehat{\alpha, r}\right) = \theta = 90° - \varphi = 90° - \left(\widehat{\vec{R}_r, \vec{n}_\alpha}\right)$, zodat inderdaad geldt:

$$\sin\left(\widehat{\alpha, r}\right) = \sin\left(90° - \left(\widehat{\vec{R}_r, \vec{n}_\alpha}\right)\right) \overset{\text{compl}}{=} \cos\left(\widehat{\vec{R}_r, \vec{n}_\alpha}\right) = \frac{|ua + vb + wc|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad □$$

Voorbeeld: bepaal de hoek tussen $\alpha \leftrightarrow 2x + 4y - 5z + 1 = 0$ en $r \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$.

We herschrijven $r \leftrightarrow \begin{cases} x = 6/5 + 7/10\,.\,k \\ y = 8/5 + 8/5\,.\,k \\ z = k \in \mathbb{R} \end{cases}$, zodat $\vec{R}_r(7, 16, 10)$. De hoek wordt dus gegeven door:

$$\sin\left(\widehat{\alpha, r}\right) = \frac{|2.7 + 4.16 - 5.10|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-5)^2}.\sqrt{7^2 + 16^2 + 10^2}} = \frac{28}{\sqrt{45}.\sqrt{405}} \Rightarrow \left(\widehat{\alpha, r}\right) \approx 11°58'14''.$$

d) Meetkundige plaatsen in de ruimte

Bollen

De verzameling punten die op een gegeven afstand r liggen van een gegeven punt $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ noemen we de bol $\mathcal{B}_{(M,r)}$ met middelpunt M en straal r (naar analogie met een cirkel in een vlak)

$$P(x,y,z) \in \mathcal{B}_{(M,r)} \Leftrightarrow |MP| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r .$$

Er geldt dus: $\boxed{\mathcal{B}_{(M,r)} \leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2}$

Voorbeeld: Stel de vergelijking op van de bol $\mathcal{B}$ met middelpunt $M(1,-2,5)$ en straal $r = \sqrt{2}$.

$\mathcal{B} \leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 2$ of nog $\mathcal{B} \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 10z + 28 = 0$.

Middelloodvlakken

De verzameling punten die even ver liggen van twee gegeven punten A en B liggen in een vlak dat het middelloodvlak van het lijnstuk $[AB]$ wordt genoemd. Dit is het vlak dat door het midden M van $[AB]$ gaat en er loodrecht op staat (de tweedimensionale variant is uiteraard de middelloodlijn).

Voorbeeld: Bepaal de vergelijking van het middelloodvlak van $[AB]$ als $A(1,2,3)$ en $B(5,6,7)$.

Het midden M van $[AB]$ is $M(3,4,5)$. Een normaalvector van λ is $N_\lambda = \overrightarrow{AB}(4,4,4) \sim (1,1,1)$.

We vinden dan eenvoudig dat $\lambda \leftrightarrow (x-3)+(y-4)+(z-5)=0$ of nog $\lambda \leftrightarrow x+y+z-12=0$.

Bissectorvlakken

De verzameling punten die even ver liggen van twee gegeven vlakken liggen ook op twee vlakken die we de bissectorvlakken noemen van die twee gegeven vlakken (naar analogie met bissectrices in twee dimensies). Een algemene vergelijking opstellen is hier niet erg handig, dus bekijken we meteen een...

Voorbeeld: stel de vergelijking op van de bissectorvlakken γ_1 en γ_2 van $\alpha \leftrightarrow 3x-4y+6=0$ en $\beta \leftrightarrow 2x-3y-6z+1=0$.

$$P(x,y,z) \in biss(\alpha,\beta) \Leftrightarrow d(P,\alpha) = d(P,\beta) \Leftrightarrow \frac{|3x-4y+6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|2x-y-6z+1|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot |3x-4y+6| = 5 \cdot |2x-y-6z+1|$$

Dus $\gamma_1 \Leftrightarrow 7(3x-4y+6) = 5(2x-y-6z+1)$ en $\gamma_2 \Leftrightarrow 7(3x-4y+6) = -5(2x-y-6z+1)$, of nog eenvoudiger geschreven $\gamma_1 \leftrightarrow 11x-23y+30z+37=0$ en $\gamma_2 \leftrightarrow 31x-33y-30z+47=0$.