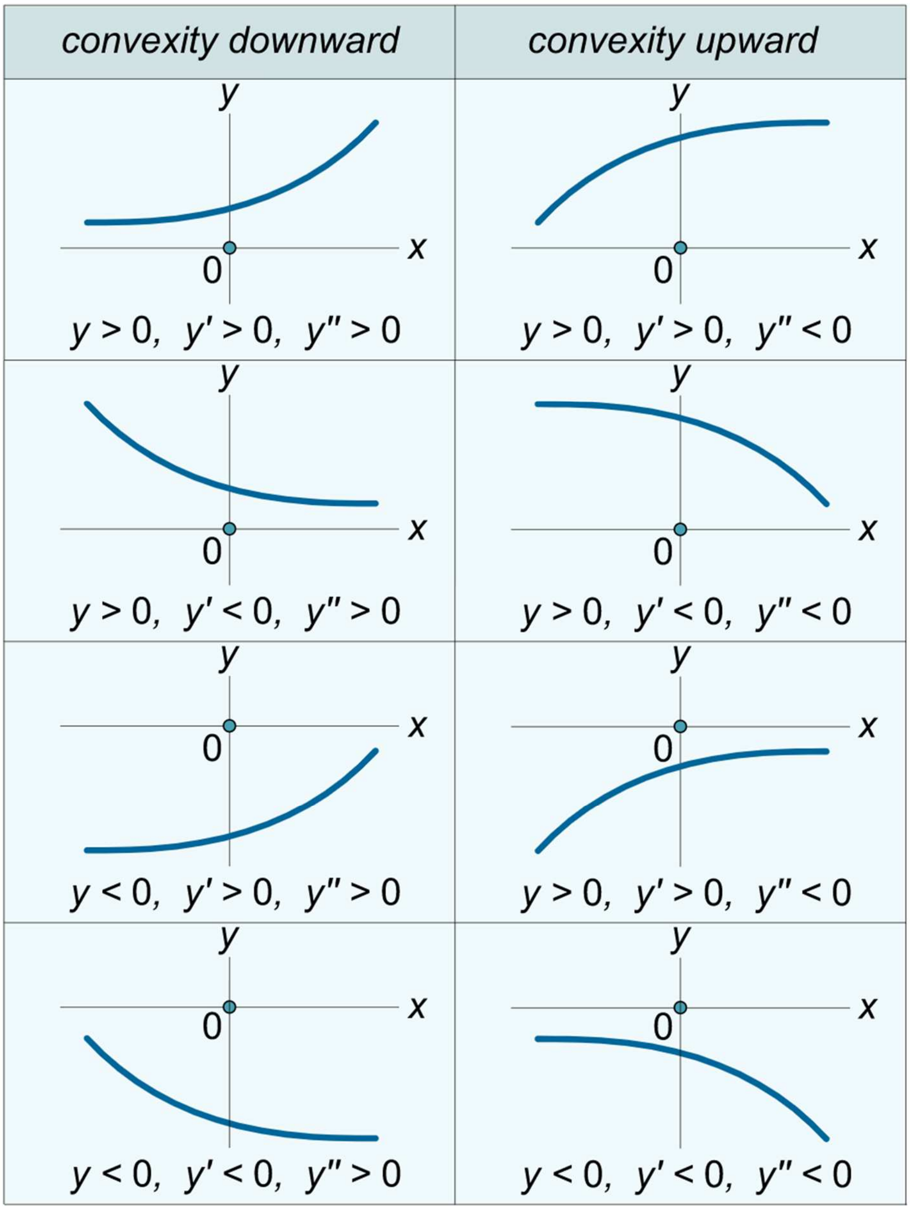
Verloop van functies



1) Herhaling: verloop van (ir)rationale functies

a) Enkele stellingen opgefrist

We lijsten de belangrijkste stellingen die we bewezen in de cursus differentiaalrekening nog eens op:

Stelling van Rolle: f is continu in $[a,b]$, afleidbaar in $]a,b[$, en $f(a)=f(b) \;\Rightarrow\; \exists c \in]a,b[: f'(c)=0$

Stelling van Lagrange: f is continu in $[a,b]$, afleidbaar in $]a,b[\;\Rightarrow\; \exists c \in]a,b[: f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Stellingen in verband met het teken van de eerste afgeleide:

- Als f afleidbaar is in $[a,b]$, dan geldt: f is stijgend in $[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] : f'(x) \geq 0$
- Als f afleidbaar is in $[a,b]$, dan geldt: f is dalend in $[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b] : f'(x) \leq 0$
- Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, met $\forall x \in]a,b[: f'(x) > 0$, dan stijgt f in $[a,b]$
- Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, met $\forall x \in]a,b[: f'(x) < 0$, dan daalt f in $[a,b]$
- Is f continu in $[a,b]$ en afleidbaar in $]a,b[$, met $\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ is constant in $[a,b]$

Nodige voorwaarde voor een extremum:

Is f afleidbaar in c en bereikt f een relatief extremum in c, dan is $f'(c)=0$.

Voldoende voorwaarde voor een extremum:

- Is f continu in c en bestaat er een basisomgeving B_c zodat f afleidbaar is in $B_c \setminus \{c\}$ waar geldt

  $\forall x \in B_c : \begin{cases} x < c \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > c \Rightarrow f'(x) > 0 \end{cases}$, dan bereikt f een relatief minimum in c.

- Is f continu in c en bestaat er een basisomgeving B_c zodat f afleidbaar is in $B_c \setminus \{c\}$ waar geldt

  $\forall x \in B_c : \begin{cases} x < c \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > c \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$, dan bereikt f een relatief maximum in c.

Criterium van Leibniz voor extrema (betekenis van de tweede afgeleide):

- Is f tweemaal afleidbaar in c, met $f'(c)=0$, en is f'' continu in een basisomgeving B_c, met $\forall x \in B_c : f''(x) > 0$, dan bereikt f een relatief minimum in c.
- Is f tweemaal afleidbaar in c, met $f'(c)=0$, en is f'' continu in een basisomgeving B_c, met $\forall x \in B_c : f''(x) < 0$, dan bereikt f een relatief maximum in c.

b) Limieten van (ir)rationale functies

Veeltermfuncties

Stel dat $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$, met $c_n \neq 0$, dan geldt:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (de functiewaarde berekenen)
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} c_n x^n$ (de limiet van de hoogstegraadsterm)

Rationale functies

Stel dat $f(x)=\dfrac{T(x)}{N(x)}=\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}$, dan geldt:

- Als $N(a)\neq 0$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dfrac{T(a)}{N(a)}$ (de functiewaarde berekenen)
- Als $N(a)=0 \wedge T(a)\neq 0$ dan heeft de functie een verticale asymptoot $x=a$. Om de linker en rechterlimieten voor $x\to a$ te berekenen (altijd $+\infty$ of $-\infty$) is een tekentabel nodig.
- Als $N(a)=0 \wedge T(a)=0$ dan kan je met het algoritme van Horner de graad van de teller en de noemer verlagen. Je krijgt dan een nieuwe (eenvoudigere) limiet.

$$\lim_{x\to a} f(x) \overset{\boxed{\text{Horner}}}{=} \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\left(a'_{n-1}x^{n-1}+a'_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a'_2x^2+a'_1x+a'_0\right)}{\cancel{(x-a)}\left(b'_{m-1}x^{m-1}+b'_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b'_2x^2+b'_1x+b'_0\right)}$$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$ (de limiet van het quotiënt van de hoogstegraadstermen)

Limieten van irrationale functies

Stel dat f een irrationale functie is. Als de functiewaarde $f(a)$ gedefinieerd is (niet onbepaald) zal zoals bij alle andere functies ook hier gelden dat $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. We bekijken de mogelijke onbepaaldheden van dichterbij

- $\boxed{\dfrac{r}{0}\left(\text{met } r\neq 0\right)}$ Net als bij rationale functies is er hier een tekenonderzoek nodig.
- $\boxed{\dfrac{0}{0}}$ Hier moet vermenigvuldigd worden met de toegevoegde wortelvorm(en) omdat je pas dan (met of zonder Horner) het gemeenschappelijke nulpunt kan wegdelen.
- $\boxed{\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ Hier kan de hoogste macht van x in teller en noemer voorop gezet worden. Hiervoor moet x soms vanonder een wortelteken gehaald worden.

  ⚠ Let daarbij op: Als $x\to+\infty$ dan is $\sqrt{x^2}=x$, maar als $x\to-\infty$ dan is $\sqrt{x^2}=-x$ ⚠
- $\boxed{+\infty-\infty}$ Vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm herleidt deze onbepaaldheid tot het vorige geval.

c) Asymptoten

Verticale asymptoten

De (grafiek van een) functie f heeft een *verticale asymptoot (VA)* met vergelijking $x=a$ als en slechts als:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)=+\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)=+\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)=-\infty$ of $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)=-\infty$.

Verticale asymptoten kunnen enkel voorkomen op de grens van het domein van een functie, aangezien een functiewaarde zelf niet oneindig kan zijn.

Horizontale asymptoten

De (grafiek van een) functie f heeft een *horizontale asymptoot (HA)* met vergelijking $y = b$ als en slechts als: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ of $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

Schuine asymptoten

Om schuine asymptoten te berekenen kunnen we een beroep doen op *de formules van Cauchy:*

Stelling: Als $y = mx + q$ een SA is van f, dan is $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ en $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right)$.

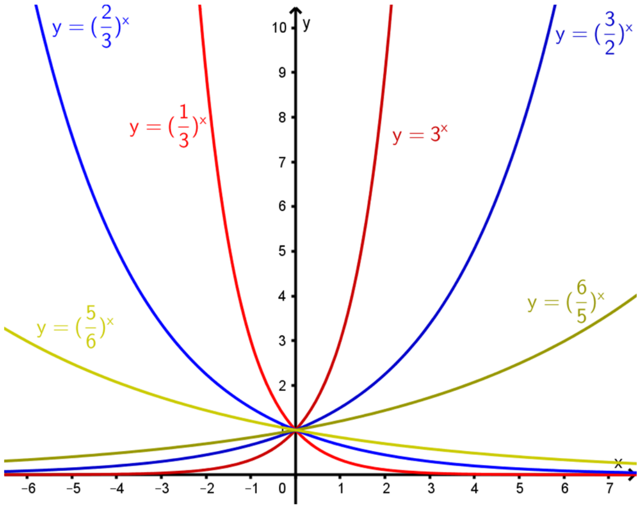
2) Verloop van exponentiële en logaritmische functies

a) Herhaling

Exponentiële functies

Een *exponentiële functie* is een functie met voorschrift $f(x) = a^x$, waarbij $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Deze functie wordt vaak genoteerd als $\exp_a$.

Hiernaast staan enkele grafieken van exponentiële functies getekend. We herhalen enkele belangrijke eigenschappen:



- Alle exponentiële functies hebben hetzelfde domein en hetzelfde beeld:
  $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : dom \exp_a = \mathbb{R}, bld \exp_a = \mathbb{R}_0^+$
- Alle grafieken gaan door het punt $(0,1)$.
- Als $a \in]0,1[$ dan is $\exp_a$ een dalende functie, als $a > 1$ dan is $\exp_a$ een stijgende functie.
- Alle exponentiële functies hebben de x-as als horizontale asymptoot:
  Als $a \in]0,1[$, dan is $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, en
  als $a > 1$, dan is $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Logaritmische functies

We noemen c de a-logaritme van b als en slechts als geldt dat $a^c = b$.

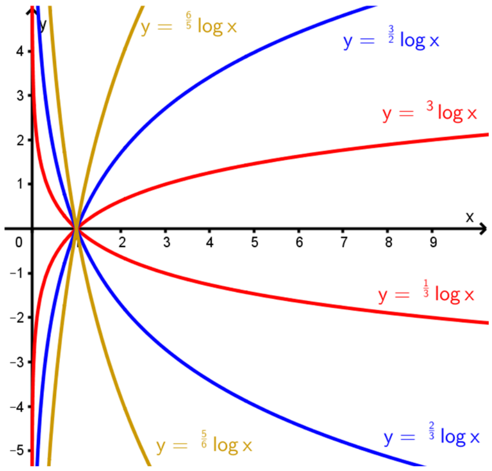
In symbolen wordt deze definitie: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}_0^+, c \in \mathbb{R} : {}^a\log b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

Rekenregels: Voor logaritmen gelden de volgende rekenregels: $\forall a,b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, \forall r \in \mathbb{R}$:

① ${}^a\log a^r = r$	② $a^{{}^a\log x} = x$
③ ${}^a\log(x.y) = {}^a\log x + {}^a\log y$	④ ${}^a\log \dfrac{x}{y} = {}^a\log x - {}^a\log y$
⑤ ${}^a\log x^r = r.\,{}^a\log x$	⑥ ${}^a\log x = \dfrac{{}^b\log x}{{}^b\log a}$

Een *logaritmische functie* is een functie met voorschrift $f(x) = {}^a\log x$, waarbij $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Deze functie wordt ook vaak genoteerd als $\log_a$.

Uit de definitie van de logaritme volgt onmiddellijk dat $\log_a$ en $\exp_a$ elkaars inverse zijn (voor alle grondtallen $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$).



Hiernaast staan enkele grafieken van logaritmische functies getekend. We herhalen enkele belangrijke eigenschappen:

- Alle logaritmische functies hebben hetzelfde domein en hetzelfde beeld:
  $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : dom \log_a = \mathbb{R}_0^+ , \quad bld \log_a = \mathbb{R}$
- Alle grafieken gaan door het punt $(1,0)$. In symbolen: $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : (1,0) \in \log_a$.
- Als $a \in]0,1[$ dan is $\log_a$ een dalende functie, als $a > 1$ dan is $\log_a$ een stijgende functie.
- Alle logaritmische functies hebben de y-as als verticale asymptoot:
  Als $a \in]0,1[$, dan is $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} {}^a\log x = +\infty$, en
  als $a > 1$, dan is $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} {}^a\log x = -\infty$.

Logaritmen met grondtal 10 noemen we Briggse logaritmen. Bij logaritmen met dit grondtal hoef je de 10 niet te schrijven (net zoals je de 2 bij een vierkantswortel ook niet schrijft).

Logaritmen met als grondtal het transcendente getal e ($e \approx 2,71828182846\ldots$) noemen we natuurlijke logaritmen, of Neperiaanse logaritmen. Hier noteer je ook geen grondtal maar gebruik je ipv $\log$ het symbool $\ln$ (dit staat voor *logaritmus naturalis*). Dat het getal e zeer belangrijk is volgt uit de volgende paragraaf.

b) Afgeleiden van exponentiele en logaritmische functies

Afgeleiden van exponentiële functies

Stelling: voor exponentiële functies geldt $D(a^x) = a^x \ln a$ en in het bijzonder $D(e^x) = e^x$

Bewijs: De definitie van afgeleide zegt (onder andere) dat $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Voor exponentiële functies (met $f(x) = a^x$) wordt dit: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Merk op dat $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, dit is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in punt $P(0,1)$.

De limiet $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ bestaat dus en is enkel afhankelijk van de waarde van a.

We definiëren nu het unieke getal e zó dat $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$. In dat geval zal dus gelden dat $D(e^x) = e^x$.

Uit de rekenregels van machten en logaritmen, en de kettingregel, volgt dan ook direct dat:

$$D(a^x) = D\left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right) = D\left(e^{x \cdot \ln a}\right) = e^{x \cdot \ln a}.\ln a = a^x \ln a \quad \square$$

Opmerking: Uit het bewijs volgt ook onmiddellijk dat $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} : \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$.

Afgeleiden van logaritmische functies

Stelling: voor logaritmische functies geldt $D\left({}^{a}\log x\right)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$ en in het bijzonder $D(\ln x)=\dfrac{1}{x}$

Bewijs: We steunen op het voorgaande en de kettingregel:

$$e^{\ln x}=x\Rightarrow D\left(e^{\ln x}\right)=D(x)\Leftrightarrow e^{\ln x}.D(\ln x)=1\Leftrightarrow x.D(\ln x)=1\Leftrightarrow D(\ln x)=\frac{1}{x}.$$

Voor andere grondtallen geldt: $D\left({}^{a}\log x\right)\overset{©}{=}D\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)=\dfrac{1}{\ln a}D(\ln x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$. □

Belangrijke gevolgen (voor de cursus integraalrekening)

- $D\left(\ln|x|\right)=\dfrac{1}{x}$, want als $x\in\mathbb{R}_0^+$ geldt $D\left(\ln|x|\right)=D(\ln x)=\dfrac{1}{x}$, en

  Als $x\in\mathbb{R}_0^-$ geldt $D\left(\ln|x|\right)=D\left(\ln(-x)\right)=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$.

- $$D\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right)=\frac{1+\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+k}}{\sqrt{x^2+k}}=\frac{\cancel{\sqrt{x^2+k}+x}}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)}\cdot\sqrt{x^2+k}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$$

Afgeleiden van f^g

Als f en g beide afleidbare functies zijn, dan geldt voor de afgeleide van de functie f^g:

$$D\left(f^g\right)=D\left(\left(e^{\ln f}\right)^g\right)=D\left(e^{g\cdot\ln f}\right)=\underbrace{e^{g\cdot\ln f}}_{=f^g}.\left(Dg\cdot\ln f+g\cdot\frac{Df}{f}\right)=f^g\cdot\ln f\cdot Dg+g\cdot f^{g-1}\cdot Df$$

Deze op het eerste zicht ingewikkelde formule kan eenvoudig onthouden worden door te beseffen dat de afgeleide bestaat uit twee termen. De eerste term bekom je door f^g af te leiden als exponentiële functie, de tweede term door af te leiden als machtsfunctie.

c) Het getal e anders bekeken

Stelling: $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Bewijs: $D(\ln x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ >}}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\overset{\boxed{stel\ x=1}}{\Rightarrow}\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ >}}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=1$

Stellen we nu $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, dan is is $n=\dfrac{1}{\Delta x}$ en geldt dat $n\to+\infty$ (omdat $\underset{>}{\Delta x\to 0}$). We krijgen:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=1\overset{*}{\Rightarrow}\ln\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ \square$$

(*: Dat $\lim$ en $\ln$ van plaats mogen wisselen ligt aan het feit dat $\ln$ een continue functie is.)

Alternatieve vormen

- $e=\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ (neem in het bewijs gewoon de linkerlimiet $\underset{<}{\Delta x\to 0}$)

- $e = \lim\limits_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}}$ (stel $z = \frac{1}{n}$ in de vorige vormen, dan zal $z \to 0$ als $n \to \pm\infty$)

d) De regel van de l'Hôpital

De regel van de l'Hôpital is een heel krachtige stelling die ons toelaat op eenvoudige wijze sommige limieten te berekenen. We bewijzen eerst een vereenvoudigde (afgezwakte) versie van de regel:

Stelling: Zijn $f(a) = g(a) = 0$, maar zo dat $g'(a) \neq 0$, met f en g afleidbaar in a, en $g'(a) \neq 0$, dan geldt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

Bewijs: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ □

Deze stelling kent ook een sterkere vorm (die we aanvaarden zonder bewijs):

Stelling: Als $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, of $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ en f en g zijn afleidbaar in een $B_a \setminus \{a\}$, zodat $\forall x \in B_a \setminus \{a\} : g'(x) \neq 0$, dan geldt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Deze stelling geldt ook als $x \to \pm\infty$)

Voorbeeld: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x}.3}{1} = 3$

Soms is het handig om de logaritme te nemen van een limiet, om het rekenwerk te vereenvoudigen:

Voorbeeld: om $\lim\limits_{x \to 0} x^x$ te berekenen stel je $\lim\limits_{x \to 0} x^x = L \Leftrightarrow \ln \lim\limits_{x \to 0} x^x = \ln L \Leftrightarrow \ln L = \lim\limits_{x \to 0} \ln x^x = \lim\limits_{x \to 0} x.\ln x$.

Via een kleine kunstgreep kunnen we hierop de regel van l'Hôpital te kunnen toepassen:

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

e) Een eenvoudige differentiaalvergelijking

Stelling: $f'(x) = k.f(x)$, met $k \in \mathbb{R}_0 \Leftrightarrow f(x) = b.e^{kx}$, met $b \in \mathbb{R}_0$.

Bewijs: "$\Leftarrow$": $f'(x) = D(b.e^{kx}) = b.e^{kx}.k = k.b.e^{kx} = k.f(x)$.

$$\text{"}\Rightarrow\text{"}: D\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right) = \frac{e^{kx} \cdot f'(x) - f(x).k.e^{kx}}{\left(e^{kx}\right)^2} = \frac{e^{kx}.k.f(x) - f(x).k.e^{kx}}{e^{2kx}} = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{e^{kx}} = b \in \mathbb{R} \quad □$$

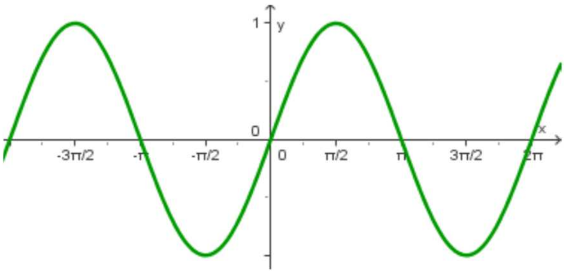
3) Verloop van goniometrische en cyclometrische functies

a) Herhaling

De goniometrische functies

De sinusfunctie

Dit is de functie $f(x) = \sin(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R}$

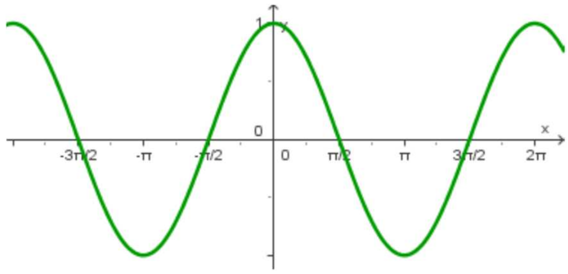
Beeld: $bld\ f = [-1,1]$

Periode: $P = 2\pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

De cosinusfunctie

Dit is de functie $f(x) = \cos(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R}$

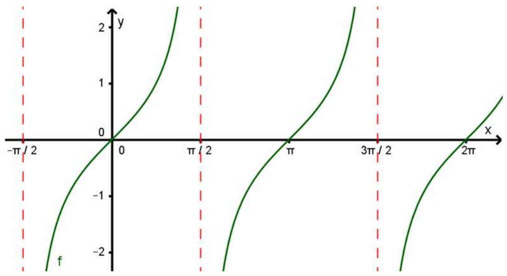
Beeld: $bld\ f = [-1,1]$

Periode: $P = 2\pi$

De grafiek is symmetrisch om de y-as.

De tangensfunctie

Dit is de functie $f(x) = \tan(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

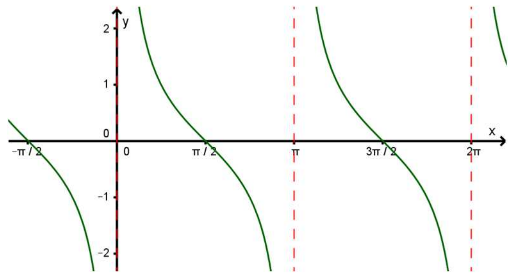
Beeld: $bld\ f = \mathbb{R}$

Periode: $P = \pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

De cotangensfunctie

Dit is de functie $f(x) = \cot(x)$.



Domein: $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Beeld: $bld\ f = \mathbb{R}$

Periode: $P = \pi$

De grafiek is symmetrisch om de oorsprong.

Goniometrische vergelijkingen

We herhalen hier snel even de drie types goniometrische basisvergelijkingen:

Sinusvergelijking:

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

Cosinusvergelijking:

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \ \vee\ x = -\alpha + 2k\pi$$

Tangensvergelijking:

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

(Hierbij geldt uiteraard dat $k \in \mathbb{Z}$)

De cyclometrische functies

De *cyclometrische functies* zijn de inverse functies van de goniometrische functies.

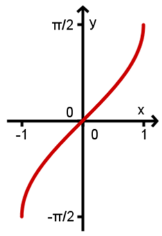
De boogsinusfunctie: $f(x)=\text{Bgsin }x$.

- $dom\ f=[-1,1]$
- $bld\ f=[-\pi/2,\pi/2]$
- Tekenverloop:

x		-1		0		1	
$f(x)$	/	-	-	0	+	+	/

- Stijgen en dalen:

x		-1		1	
$f(x)$	/	|	↗	|	/



- Symmetrie: de functie is oneven

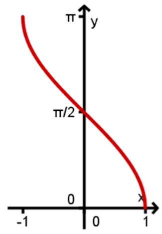
De boogcosinusfunctie: $f(x)=\text{Bgcos }x$.

- $dom\ f=[-1,1]$
- $bld\ f=[0,\pi]$
- Tekenverloop:

x		-1		0		1	
$f(x)$	/	+	+	+	+	0	/

- Stijgen en dalen:

x		-1		1	
$f(x)$	/	|	↘	|	/



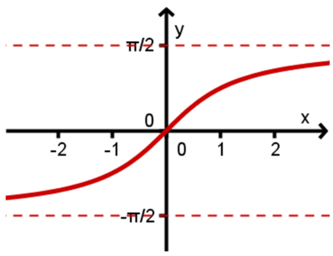
De boogtangensfunctie: $f(x)=\text{Bgtan }x$.

- $dom\ f=\mathbb{R}$
- $bld\ f=]-\pi/2,\pi/2[$
- Tekenverloop:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Stijgen en dalen:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↗	

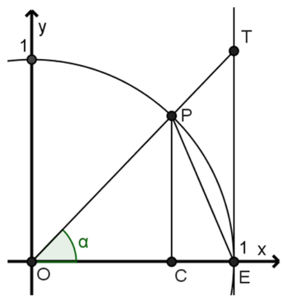


- Symmetrie: de functie is oneven (symmetrisch om de oorsprong).
- Asymptotisch gedrag: $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Bgtan }x=\pi/2$ en $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Bgtan }x=-\pi/2$

  De grafiek heeft dus twee horizontale asymptoten: $y=\pi/2$ en $y=-\pi/2$

b) Afgeleiden van de goniometrische functies

Een belangrijke limiet



Stelling: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Bewijs: We bekijken eerst de rechterlimiet $\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\>}}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ en stellen $\alpha\in\,]0,\pi/2[$.

Beschouw de figuur rechts. Voor een hoek α in het eerste kwadrant is het dan eenvoudig om in te zien dat de oppervlakte van driehoek ΔOEP kleiner is dan de oppervlakte van de cirkelsector bepaald door α die op zijn beurt weer kleiner is dan de oppervlakte van driehoek ΔOET. Dus geldt:

$$\forall\alpha\in\,]0,\pi/2[:\frac{\sin\alpha}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\tan\alpha}{2}\Leftrightarrow1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Neem hierin de limiet $\alpha\to0$ en er moet gelden dat $1\le\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\>}}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}\le1$, zodat inderdaad $\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\>}}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1$.

Verander je hierbij α in $-\alpha$, dan krijg je: $\lim\limits_{\substack{-\alpha\to0\\>}}\dfrac{-\alpha}{\sin(-\alpha)}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\<}}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1$, dus ook de linkerlimiet is 1.

We mogen dus besluiten dat $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1$, en dus ook dat $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$. □

De afgeleide van de sinusfunctie

De afgeleide in punt $a \in \mathbb{R}$ van de sinusfunctie $f(x) = \sin x$, wordt gegeven door:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2 \cdot \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x - a}$$

$$= \lim_{\frac{x-a}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x \to a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{2a}{2} = \cos a$$, of korter genoteerd: $D \sin x = \cos x$.

De afgeleiden van de andere goniometrische functies

Met behulp van de gekende rekenregels kunnen we nu ook de andere goniometrische functies afleiden:

- $D(\cos x) = D(\sin(\pi/2 - x)) = \cos(\pi/2 - x) \cdot (-1) = -\sin x$
- $D(\sec x) = D\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = -\dfrac{D\cos x}{\cos^2 x} = -\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$
- $D(\csc x) = D\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = -\dfrac{D\sin x}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x$
- $D(\tan x) = D\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{\cos x \cdot D\sin x - \sin x \cdot D\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $D(\cot x) = D\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{\sin x \cdot D\cos x - \cos x \cdot D\sin x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Voorbeeld 1: $D\left(\sqrt{\sin x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot D\sin x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

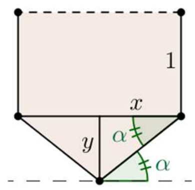
Voorbeeld 2: $D\left(x^4 \cdot \sin x\right) = x^4 \cdot D\sin x + \sin x \cdot Dx^4 = x^4 \cos x + 4x^3 \sin x$

Voorbeeld 3: Bereken de limiet $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x}$.

Zonder de regel van l'Hôpital is deze limiet heel moeilijk te berekenen, maar nu wordt dit kinderspel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \sin x} \underset{\boxed{0/0}}{\overset{\boxed{H}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} \underset{\boxed{0/0}}{\overset{\boxed{H}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{6x}{\sin x} \underset{\boxed{0/0}}{\overset{\boxed{H}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{6}{\cos x} = 6$$

Voorbeeld 4: Een symmetrische dakgoot wordt gevormd door een ijzeren plaat van 4 dm breed te plooien in vier gelijke stukken zoals op de figuur hiernaast. De goot is vanboven open en heeft twee evenwijdige wanden. Hoe groot moet de hellingshoek α genomen worden opdat de inhoud van de goot maximaal zou zijn.



Op de figuur zien we dat $\cos\alpha = \dfrac{x}{1} \Rightarrow x = \cos\alpha$ en $\sin\alpha = \dfrac{y}{1} \Rightarrow y = \sin\alpha$.

De oppervlakte is dan $S = S_{\square} + S_{\triangledown} = 1.2x + \dfrac{2x.y}{2} = 2\cos\alpha + \cos\alpha.\sin\alpha$.

Het is deze functie die we gaan onderzoeken in het praktische domein $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Afleiden (naar α) geeft:

$$\frac{dS}{d\alpha} = -2\sin\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 - 2\sin\alpha - 2\sin^2\alpha$$

Om de nulpunten te zoeken lossen we de vierkantsvergelijking in $\sin\alpha$ op, met $\Delta = 12$:

$$-2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1 = 0 \iff \sin\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-4} \iff \sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \vee \cancel{\sin\alpha = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}}.$$

Stel $x_1 = \text{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, dan wordt het tekenverloop in het praktische domein $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

x	0		x_1		$\pi/2$
$dS/d\alpha$	1	+	0	-	-3
S		↗	MAX	↘	

De functie bereikt dus haar maximum als $\alpha = x_1 \approx 21°28'15"$.

(Alle andere nulpunten liggen niet in het praktische domein)

c) Afgeleiden van de cyclometrische functies

Afgeleide van een inverse functie

Stel dat f afleidbaar is in $y = f(x)$ en dat $f'(y) \neq 0$, dan geldt voor de inverse functie f^{-1}:

$$x = f\left(f^{-1}(x)\right) \Rightarrow 1 = f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) \iff \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

De afgeleiden van de cyclometrische functies

De vorige stelling gebruiken geeft:

- $D(\text{Bgsin}\,x) = \dfrac{1}{\cos(\text{Bgsin}\,x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\text{Bgtan}\,x) = \cos^2(\text{Bgtan}\,x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \dfrac{1}{1+x^2}$

Analoog kan je afleiden dat $D(\text{Bgcos}\,x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $D(\text{Bgcot}\,x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.