

Oplossingen

1. Gegeven is de kromme die impliciet gedefinieerd wordt als $\mathcal{B} \leftrightarrow x^4 + x^2 + y^3 + y^2 = 2$.

- a) Bewijs dat het punt $A(2, -3)$ op deze kromme ligt.

$$A(2, -3) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow 2^4 + 2^2 + (-3)^3 + (-3)^2 = 2 \quad \square$$

- b) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme $\mathcal{B}$ in punt A .

$$\text{Impliciet afleiden geeft } 4x^3 + 2x + 3y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{4x^3 + 2x}{3y^2 + 2y}.$$

$$\text{In punt } A(2, -3) \text{ is dus } y' = -\frac{4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2}{3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3)} = -\frac{36}{21} = -\frac{12}{7}$$

- c) Bewijs dat er vier punten zijn op deze kromme waar de raaklijn verticaal is.

$$\text{Raaklijnen zijn verticaal als en slechts als } 3y^2 + 2y = 0, \text{ dus als } y = 0 \text{ of } y = -\frac{2}{3}.$$

$$y = 0 \text{ invullen in de vergelijking van } \mathcal{B} \text{ geeft: } x^4 + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

De snijpunten met de x -as $A(1, 0)$ en $B(-1, 0)$ zijn dus punten waar de raaklijn verticaal is.

$$y = -\frac{2}{3} \text{ invullen in de vergelijking van } \mathcal{B} \text{ geeft:}$$

$$x^4 + x^2 - \frac{8}{27} + \frac{4}{9} = 2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - \frac{50}{27} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 + \sqrt{\frac{227}{27}}}{2} \vee x^2 = \frac{-1 - \sqrt{\frac{227}{27}}}{2}$$

Dit volstaat om te bewijzen dat er nog twee zulke punten zijn, want $x^2 = \frac{-1 + \sqrt{\frac{227}{27}}}{2} > 0$ geeft nog twee (teggengestelde) oplossingen. Voor de volledigheid berekenen we ook snel de twee coördinaten:

$$\text{Je kan eventueel vereenvoudigen: } x^2 = \frac{-1 + \sqrt{\frac{227}{27} \cdot \frac{3}{3}}}{2} = \frac{-1 + \frac{1}{9} \cdot \sqrt{681}}{2} \cdot \frac{18}{18} = \frac{-18 + 2\sqrt{681}}{36}.$$

$$\text{Dus ook in } C\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{681}-18}}{6}, -\frac{2}{3}\right) \text{ en } D\left(-\frac{\sqrt{2\sqrt{681}-18}}{6}, -\frac{2}{3}\right) \text{ zijn de raaklijnen verticaal.}$$

2. Gegeven is de kromme $\mathcal{C} \leftrightarrow (x + y + 1)^3 = 1 + 3x + y^2$.

wordt als Stel de vergelijking op van de raaklijn aan $\mathcal{C}$ in haar snijpunt met de y -as.

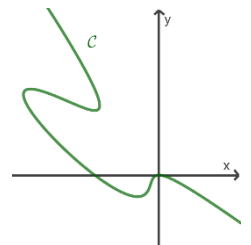
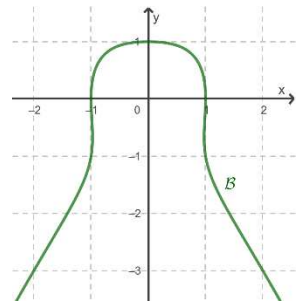
- a) Bepaal de snijpunten van de kromme $\mathcal{C}$ met de assen.

$$\begin{aligned} x = 0: \quad (y+1)^3 &= 1 + y^2 \Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = 1 + y^2 \Leftrightarrow y^3 + 2y^2 + 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow y \underbrace{(y^2 + 2y + 3)}_{\Delta < 0} = 0 \Leftrightarrow y = 0, \text{ dus } \mathcal{O}(0, 0) \text{ is het enige snijpunt met de } y\text{-} \end{aligned}$$

as.

$$\begin{aligned} y = 0: \quad (x+1)^3 &= 1 + 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 1 + 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3, \text{ dus naast } \mathcal{O} \text{ snijdt de kromme ook de } x\text{-as in } N(-3, 0). \end{aligned}$$

- b) Bepaal de raaklijn aan de kromme $\mathcal{C}$ in haar meest linkse snijpunt met de x -as.



Impliciet afleiden geeft: $3(x+y+1)^2 \cdot (1+y') = 3 + 2yy' \Leftrightarrow y' = \frac{-3(x+y+1)^2 + 3}{3(x+y+1)^2 - 2y}$

In punt $N(-3,0)$ geldt dus $y' = \frac{-3(-3+0+1)^2 + 3}{3(-3+0+1)^2 - 2 \cdot 0} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$, dus $t_N \leftrightarrow y = -\frac{3}{4}(x+3)$.

- c) Bepaal de punten waar de kromme $\mathcal{C}$ een horizontale raaklijn heeft.

Een horizontale raaklijn heeft de kromme als en slechts als:

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3(x+y+1)^2 + 3 \Leftrightarrow x+y+1 = \pm 1 \Leftrightarrow \underbrace{x = -y}_{\textcircled{1}} \vee \underbrace{x = -y-2}_{\textcircled{2}}$$

Vullen we $\textcircled{1}$ in de vergelijking van $\mathcal{C}$ in dan vinden we: $1 = 1 - 3y + y^2 \Leftrightarrow y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 3$.

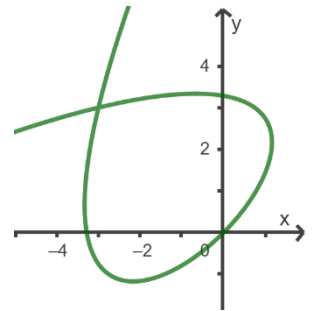
Dit geeft dus de punten $\mathcal{O}(0,0)$ en $A(-3,3)$.

Vullen we $\textcircled{2}$ in de vergelijking van $\mathcal{C}$ in dan is: $-1 = 1 - 3y - 6 + y^2 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 4$.

Dit geeft dus de punten $B(-1,-1)$ en $D(-6,4)$.

(Merk op dat in deze punten de noemer bij y' verschillend is van 0, zodat er inderdaad horizontale raaklijnen zijn.)

3. Gegeven is de parameterkromme: $\mathcal{K} \leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t \\ y(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \end{cases}$, met $t \in \mathbb{R}$.



- a) Ga na dat deze kromme $\mathcal{K}$ door de oorsprong gaat.

Als $t = 0$ is het duidelijk dat $x(0) = 0$ en $y(0) = 0$.

- b) Stel de vergelijking op van de raaklijn aan $\mathcal{K}$ in de oorsprong $\mathcal{O}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - t - 2}. \text{ In } \mathcal{O} \text{ is dit dus } \frac{dy}{dx} = 1, \text{ zodat } t \leftrightarrow y = x.$$

- c) Bepaal de punten waar $\mathcal{K}$ horizontale of verticale raaklijnen heeft.

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2 \Rightarrow \text{in } A\left(-\frac{13}{6}, -\frac{7}{6}\right) \text{ en } B\left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ zijn de raaklijnen horizontaal.}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 2 \Rightarrow \text{in } C\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right) \text{ en } D\left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ zijn de raaklijnen verticaal.}$$

- d) Op de figuur zie je dat deze kromme zichzelf snijdt. Bepaal de coördinaat van het punt waar dit het geval is.

Noem de coördinaat van dat punt $S(a,b)$, dan moeten er twee verschillende oplossingen zijn van het stelsel:

$$\begin{cases} a = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t \\ b = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \end{cases} \text{ . Dus er moeten reële getallen } r \text{ en } s \text{ (} r \neq s \text{) bestaan zodat } \begin{cases} \frac{r^3}{3} - \frac{r^2}{2} - 2r = \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} - 2s \\ \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} - 2r = \frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} - 2s \end{cases}$$

Deze vergelijkingen lid aan lid aftrekken geeft $-r^2 = -s^2 \Leftrightarrow \cancel{r=s} \vee \boxed{r=-s}$.

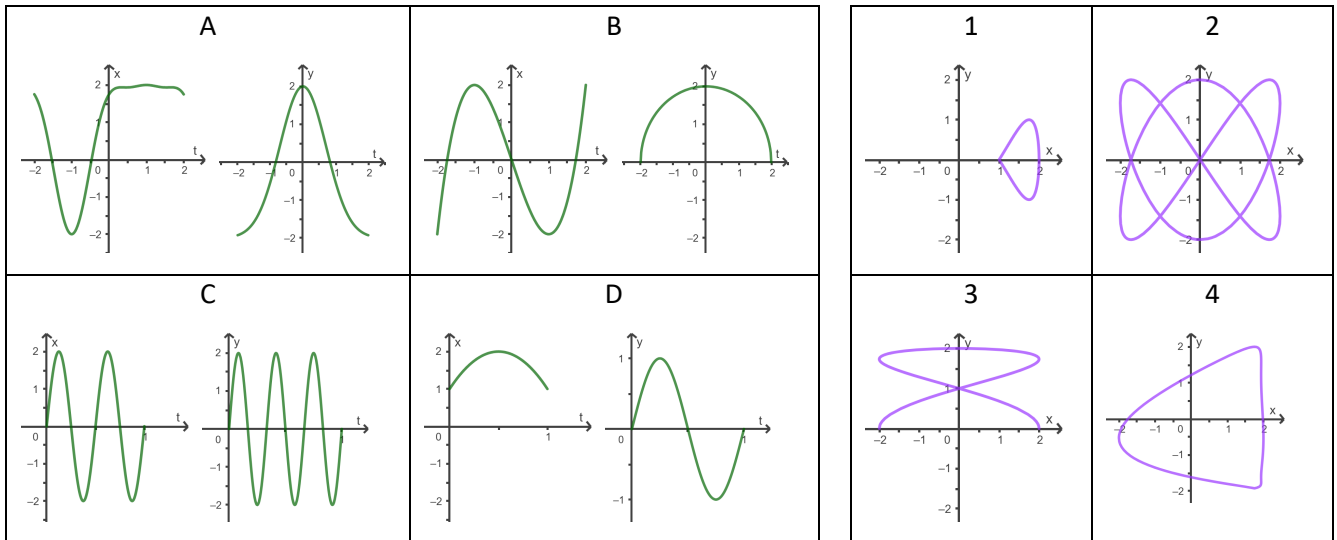
$$\text{Dit invullen in de eerste vergelijking geeft: } \frac{-s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + 2s = \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} - 2s \Leftrightarrow s^3 - 6s = 0 \Leftrightarrow s = 0 \vee s = \pm\sqrt{6}$$

$s = 0$ kan niet, want dan zou ook $r = 0$ en er moet gelden dat $r \neq s$.

De twee reële getallen r en s die we dus vinden als oplossing van het stelsel zijn $\sqrt{6}$ en $-\sqrt{6}$.

Invullen geeft $a = -3$ en $b = 3$, dus het snijpunt is $S(-3,3)$.

4. Je ziet links in het groen telkens grafieken van x en y in functie van t gegeven. Verbind deze met de juiste parameterkromme die je rechts paars ziet getekend.



Je kan dit op véél manieren doen. Een eenvoudige manier is om naar de beelden van de functies links te kijken:

B: $x \in [-2, 2]$ en $y \in [0, 2]$ dit kan dus alleen kromme 3 zijn.

D: $x \in [1, 2]$ en $y \in [-2, 2]$ dit kan dus alleen kromme 1 zijn.

Voor A en C lukt dit niet omdat telkens $x \in [-2, 2]$ en $y \in [-2, 2]$.

Kromme 2 gaat (meermaals) door de oorsprong. Dat is enkel bij de grafieken van C het geval voor dezelfde t -waarden.

Eliminatie geeft dat A bij 4 hoort.

Samengevat zijn de oplossingen dus A4, B3, C2 en D1.

5. Je ziet hiernaast (een stuk van) de kromme $\mathcal{K} \leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = t^2 - 15t - 12 \end{cases}$, met $t \in \mathbb{R}^+$ getekend.

- a) Toon aan dat het punt $A(1, -26)$ op deze kromme ligt.

Dit is duidelijk het punt dat overeenkomt met $t = 1$.

- b) Bewijs dat de raaklijn in punt A aan deze kromme door de oorsprong gaat.

Er geldt: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t-15}{1/2\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}(2t-15)$, dus als $t = 1$ dan geldt: $\frac{dy}{dx} = -26$.

De raaklijn in punt A is dus $t_A \leftrightarrow y = -26(x-1) - 26$ of nog $t_A \leftrightarrow y = -26x$, en deze gaat door $\mathcal{O}$ $\square$

- c) Naast punt A is er nog een punt B waar de raaklijn aan deze kromme door de oorsprong gaat. Bepaal zijn coördinaat.

- d) De raaklijn t_p in een willekeurig punt $P(x(t), y(t))$ wordt gegeven door:

$$t_p \leftrightarrow y = \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot (x - x(t)) + y(t) \Leftrightarrow y = 2\sqrt{t}(2t-15) \cdot (x - \sqrt{t}) + t^2 - 15t - 12$$

$$\mathcal{O} \in t_p \Leftrightarrow 0 = 2\sqrt{t}(2t-15) \cdot (0 - \sqrt{t}) + t^2 - 15t - 12 \Leftrightarrow -4t^2 + 30t + t^2 - 15t - 12 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 5t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 4. \text{ Ook de raaklijn als } t = 4 \text{ zal dus door de oorsprong gaan, dit is in punt } B(2, -56).$$

(Je rekt eenvoudig na dat de raaklijn daar gegeven wordt door $t_B \leftrightarrow y = -28x$)

6. Bewijs de volgende stelling: de raaklijn aan een parameterkromme $\mathcal{K} \leftrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ zal door de oorsprong gaan

als en slechts als voor die t -waarde geldt dat $x'(t) \cdot y(t) - x(t) \cdot y'(t) = 0$.

De raaklijn t_p in een willekeurig punt $P(x(t), y(t))$ wordt geven door:

$$t_p \leftrightarrow y = \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot (x - x(t)) + y(t)$$

$$\mathcal{O} \in t_p \Leftrightarrow 0 = \frac{y'(t)}{x'(t)} \cdot (0 - x(t)) + y(t) \Leftrightarrow -y'(t) \cdot x(t) + y(t) \cdot x'(t) = 0 \quad \square$$