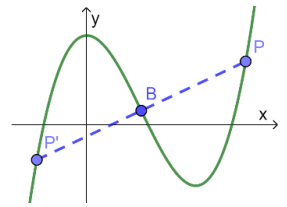


1. Gegeven is de derdegraadsfunctie f met voorschrift $f(x) = x^3 - 6x^2 + 19$.

Bewijs dat het buigpunt van de grafiek van de functie f een symmetriemiddelpunt is van haar grafiek.



$$f'(x) = 3x^2 - 12x \text{ en } f''(x) = 6x - 12 \text{ dus het buigpunt van deze grafiek is } B(2, 3)$$

Dan geldt:
$$\frac{f(2+x) + (2-x)}{2} = \frac{(2+x)^3 - 6(2+x)^2 + 19 + (2-x)^3 - 6(2-x)^2 + 19}{2} = 3$$

Zodat $B(2, 3)$ inderdaad een symmetriemiddelpunt is. $\square$

Bewijs dat dat voor elke derdegraadsfunctie het geval is.

Je kan dit ook doen met de definitie van symmetriemiddelpunt, maar we gaan eens een alternatief gebruiken:

We gaan de functie verschuiven zodat het buigpunt de oorsprong wordt en dan aantonen dat die getransformeerde functie oneven is (dat wil dan zeggen dat het buigpunt een symmetriemiddelpunt is).

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b, \text{ met als nulpunt } x = \frac{-b}{3a}$$

Het buigpunt heeft als functiewaarde $f\left(\frac{-b}{3a}\right) = a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c \cdot \frac{-b}{3a} + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$.

We bekijken dus de functie $g(x) = f\left(x - \frac{b}{3a}\right) - \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)$

(Deze heeft dezelfde grafiek als die van f maar is zo verschoven dat het buigpunt nu de oorsprong is.)

$$\begin{aligned} g(x) &= a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) - \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) \\ &= a\left(x^3 - 3x^2 \cdot \frac{b}{3a} + 3x \cdot \frac{b^2}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(x^2 - \frac{2bx}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) - \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) \\ &= ax^3 - bx^2 + \frac{b^2}{3a}x - \frac{b^3}{27a^2} + bx^2 - \frac{2b^2x}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cx - \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \end{aligned}$$

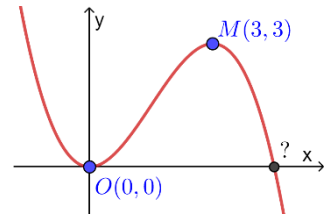
Dus $g(x) = ax^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)x$ en dit is wel degelijk een oneven functie, waarmee het gestelde is bewezen. $\square$

2. Een derdegraadsfunctie heeft de punten $O(0,0)$ en $M(3,3)$ als extrema.

a) Stel het functievoorschrift op van deze functie.

Stel $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. We weten:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f(3) = 3 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ 27a + 9b = 3 \\ 27a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2/9 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2$$



b) In welk punt snijdt de grafiek van deze functie nogmaals de x -as?

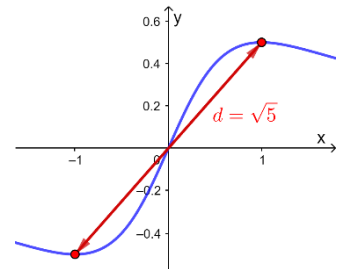
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9}x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{9}{2}. \text{ Dus het tweede nulpunt is } \left(\frac{9}{2}; 0\right).$$

3. Gegeven is de familie functies f_a met voorschrift $f_a(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$ ($a \in \mathbb{R}_0^+$).

d) Bewijs dat al deze functies twee extrema hebben.

$$f'_a(x) = \frac{x^2 + a^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2}, \text{ met nulpunten } x = \pm a.$$

De extrema zijn dus $A\left(-a, \frac{-1}{2a}\right)$ en $B\left(a, \frac{1}{2a}\right)$.



e) Op welke kromme liggen al deze extrema?

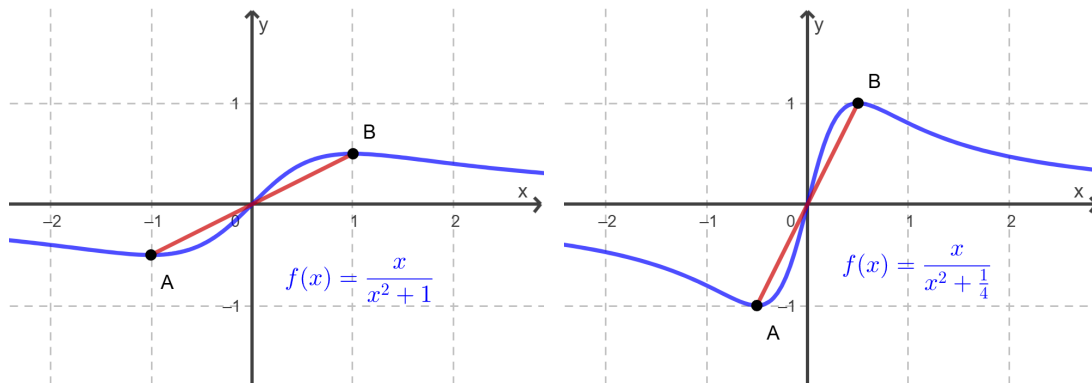
Deze extrema liggen duidelijk op de hyperbool $\mathcal{H} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$

f) Voor welke waarde(n) van de parameter a is de afstand tussen deze twee extremale punten gelijk aan $\sqrt{5}$?

$$|AB| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 4a^2 + \frac{1}{a^2} = 5 \Leftrightarrow 4a^4 - 5a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \vee a^2 = \frac{1}{4}.$$

De mogelijke waarden voor a zijn dus $a = 1$ en $a = \frac{1}{2}$

Grafische controle:



4. Beschouw de functie f met voorschrift $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

a) Bepaal het domein van f en stel het tekenverloop op van f .

$$x \in \text{dom } f \Leftrightarrow x \neq 0, \text{ dus } \text{dom } f = \mathbb{R}_0.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

b) Ga na dat (de grafiek van) deze functie enkel een verticale asymptoot heeft (geen horizontale of schuine).

$$\text{Er geldt } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \text{ dus de } y\text{-as is een VA.}$$

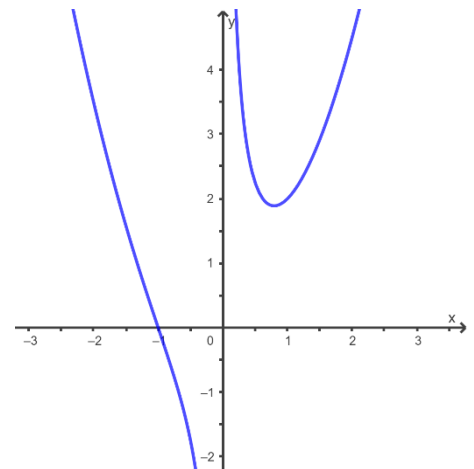
Als $x \rightarrow \pm\infty$ gedraagt de functie zich als $f(x) \approx x^2$ (dit is duidelijk geen rechte maar een parabool).

c) Bereken de eerste en tweede afgeleide van f en maak een samenvattende tabel met de tekenverlopen van f' en f'' en de conclusies die je hieruit kan trekken voor het verloop van de grafiek van f .

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	$1/\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	+	+
$f(x)$	$\searrow$	BP	$\searrow$	MIN	$\nearrow$



5. Binnen het positieve deel van de parabool $\mathcal{P} \Leftrightarrow y = 9 - x^2$ wordt een rechthoek getekend waarvan één zijde op de x -as ligt.

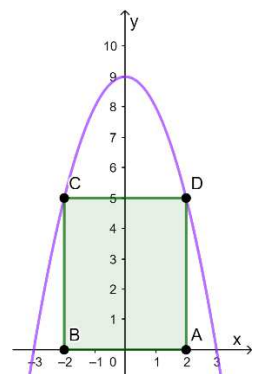
Bepaal de maximale oppervlakte van deze rechthoek.

Noem a de x -coördinaat van A , met dus $a \in]0, 3[$.

Dan geldt voor de oppervlakte van de rechthoek:

$$A = 2a \cdot (9 - a^2) = 18a - 2a^3 \Rightarrow \frac{dA}{da} = 18 - 6a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}.$$

De oppervlakte is dus maximaal $A = 2\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$.

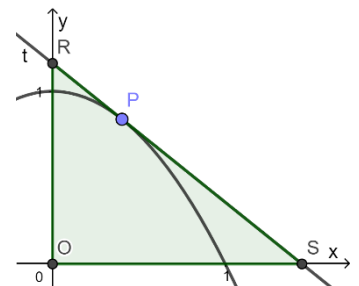


6. Aan een punt P in het eerste kwadrant dat op de parabool $\mathcal{P} \Leftrightarrow y = 1 - x^2$ ligt wordt een raaklijn t getekend die de y -as snijdt in R en de x -as snijdt in S .

Bewijs dat de oppervlakte van deze driehoek minimaal is als P het midden is van het lijnstuk $[RS]$.

Noem p de x -coördinaat van dat punt P , dus met $p \in]0, 1[$.

De raaklijn is dan $t \Leftrightarrow y = -2p(x - p) + 1 - p^2 \Leftrightarrow y = -2px + 1 + p^2$.



Deze raaklijn snijdt de y -as in punt $R(0, 1+p^2)$ en de x -as in punt $S\left(\frac{1+p^2}{2p}, 0\right)$.

De oppervlakte van de driehoek is dan $A = \frac{(1+p^2)^2}{4p}$.

$$\frac{dA}{dp} = \frac{4p \cdot 2(1+p^2) \cdot 2p - 4(1+p^2)^2}{(4p)^2} = 0 \Leftrightarrow 4p^2 - (1+p^2) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dan is $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ en dat is effectief het midden van $[RS]$ want $R\left(0, \frac{4}{3}\right)$ en $S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ $\square$

7. Bepaal $a, b \in \mathbb{R}_0$ zodat de grafiek van $f(x) = \frac{a}{\sqrt{x^2+b}}$ het punt $P(-1, 2)$ als buigpunt heeft.

$$f'(x) = \frac{-a \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+b}}}{x^2+b} = \frac{-ax}{(x^2+b)^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+b)^{3/2} \cdot (-a) + ax \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2+b)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+b)^{5/2}} = \frac{2ax^2 - ab}{(x^2+b)^{5/2}}.$$

Opdat f een buigpunt heeft als $x = -1$ moet $f''(-1) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \frac{2-b}{(1+b)^{5/2}} = 0 \Rightarrow a = 0 \vee \boxed{b=2}$.

$$f(-1) = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{1+2}} = 2 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}.$$

- Bepaal in dat geval ook de vergelijking van de buigraaklijn in P .

$$\text{In dat geval geldt: } f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}}, f'(x) = \frac{-2\sqrt{3} \cdot x}{(x^2+2)^{3/2}}$$

Dan is $f'(-1) = \frac{2\sqrt{3}}{3^{3/2}} = \frac{2}{3}$, zodat $t_b \leftrightarrow y = \frac{2}{3} \cdot (x+1) + 2$ of eenvoudiger $t_b \leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

Grafische controle:

