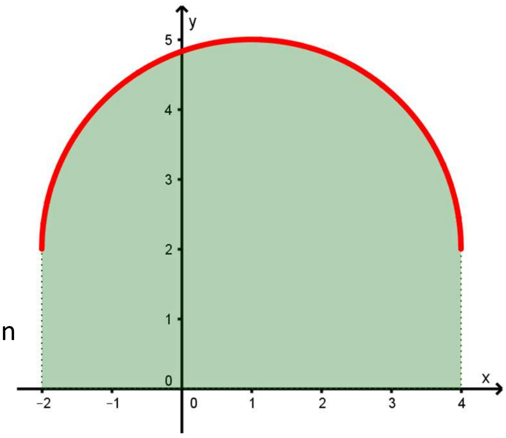
Oplossingen

1. Op de figuur hiernaast zie je (in rood) de grafiek van de functie

$$f(x)=2+\sqrt{9-(x-1)^2}$$

Je kan aantonen dat deze grafiek een halve cirkel is.



a) ★★ Bereken $\int_{-2}^{4}\left(2+\sqrt{9-(x-1)^2}\right)dx$

Als oppervlakte bekeken is dit een halve cirkel met straal 3 op een rechthoek met breedte 6 en hoogte 2. De oppervlakte is dus:

$$\int_{-2}^{4}\left(2+\sqrt{9-(x-1)^2}\right)dx=6.2+\frac{\pi.3^2}{2}=12+\frac{9}{2}\pi$$

b) ★★ Bereken $\int_{1}^{4}\left(2+\sqrt{9-(x-1)^2}\right)dx$

Dit is een kwartcirkel op een rechthoek, dus: $\int_{1}^{4}\left(2+\sqrt{9-(x-1)^2}\right)dx=3.2+\frac{\pi.3^2}{4}=6+\frac{9}{4}\pi$.

2. Gegeven is de functie $f(x)=\dfrac{x^3\cdot\cos(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

a) ★★ Bewijs dat de functie f oneven is.

$$f(-x)=\frac{(-x)^3\cdot\cos(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}=\frac{-x^3\cdot\cos(x)}{\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$$

b) ★ Bereken $\int_{-2}^{2}\dfrac{x^3\cdot\cos(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^3\cdot\cos(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx=0$$

(De negatieve oppervlakte voor de y-as is even groot als de positieve oppervlakte na de y-as.)

3. Gegeven is de functie $f(x)=x^3+x^2$.

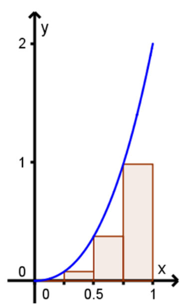
a) ★ Bereken de ondersom van deze functie voor het interval $[0,1]$ verdeeld in 4 gelijke deelintervallen.

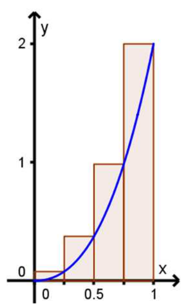
b) ★ Bereken de bovensom van deze functie voor het interval $[0,1]$ verdeeld in 4 gelijke deelintervallen.

c) ★★ Hoeveel % zit je naast de werkelijke oppervlakte als je het gemiddelde van de vorige antwoorden neemt?

Ondersom: $s_4=\frac{1}{4}.0+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{16}\right)=\frac{23}{64}$

Bovensom: $s_4=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{16}\right)+\frac{1}{4}(1+1)=\frac{55}{64}$



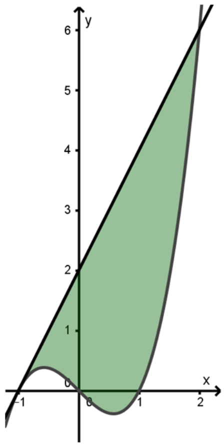


Het gemiddelde als benadering: $S\approx\dfrac{\frac{23}{64}+\frac{55}{64}}{2}=\dfrac{39}{64}$

De werkelijke oppervlakte is $\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

Het verschil bedraagt $\frac{39}{64}-\frac{7}{12}=\frac{5}{192}$, dit is $\frac{5/192}{7/12}=\frac{5}{112}\approx 4,46\%$ naast de werkelijke oppervlakte.

4. ★★ Bepaal de oppervlakte begrepen tussen de grafiek van de functie $f(x)=x^3-x$ en de raaklijn aan deze functie in haar kleinste nulpunt.



De nulpunten van f zijn $(-1,0)$, $(0,0)$ en $(1,0)$. Het kleinste nulpunt is $(-1,0)$.

$f'(x)=3x^2-1$, dus $f'(-1)=3.(-1)^2-1=2$, zodat:

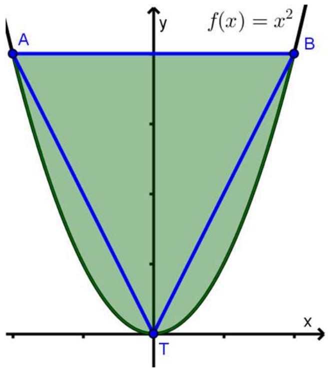
$t \leftrightarrow y=2(x+1) \Leftrightarrow t \leftrightarrow y=2x+2$.

De verschilfunctie is $v(x)=2x+2-x^3+x=-x^3+3x+2$, met als tekenverloop:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	

De gezochte oppervlakte is dus $\int_{-1}^{2}\left(-x^3+3x+2\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$

5. ★★ Bewijs dat de oppervlakte van een paraboolsegment (oppervlakte begrensd door de parabool en een rechte loodrecht op de as van een parabool) gelijk is aan $4/3$ van de oppervlakte van de driehoek bepaald door het lijnstuk van het paraboolsegment en de top van de parabool.



Dus: bewijs op de figuur dat voor de groene oppervlakte geldt $S=\frac{4}{3}\cdot S_{\Delta ABT}$.

Neem voor $A(-a,a^2)$ en $B(a,a^2)$, zodat $S_{\Delta ABT}=\frac{2a.a^2}{2}=a^3$.

En voor S geldt: $S=\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}a^3$ □

6. ★★ Bereken de gemiddelde waarde van de functie $f(x)=\sec^2 x$ op het interval $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

De gemiddelde waarde is $G=\frac{\int_0^{\pi/3}\sec^2 x\,dx}{\pi/3-0}=\frac{[\tan x]_0^{\pi/3}}{\pi/3}=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

7. ★★ Bereken de oneigenlijke integralen $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}}$ en $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

- $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ >}}\int_k^4\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ >}}\left[2\sqrt{x}\right]_k^4=\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ >}}\left(4-2\sqrt{k}\right)=4$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{k\to+\infty}\int_{-k}^{k}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{k\to+\infty}\left[\text{Bgtan}\,x\right]_{-k}^{k}=\lim\limits_{k\to+\infty}\left(2.\text{Bgtan}\,k\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$