1. ★ Op welk cijfer eindigt de som $1!+2!+3!+4!+...+2016!+2017!$ ?

   De som is gelijk aan $1+2+6+24+120+720+...$

   Alle faculteiten vanaf $5!=120$ eindigen op 0 (omdat ze zeker deelbaar zijn door 10).

   Het laatste cijfer van de gegeven som is dus zeker een $3$.

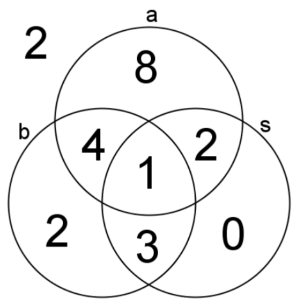
2. ★⋆ Bereken $\dfrac{(5!)!-117!}{116!}$.

   $$\frac{(5!)!-117!}{116!}=\frac{120!-117!}{116!}=\frac{120!}{116!}-\frac{117!}{116!}=120.119.118.117-117=197149563$$

3. ★★ Bereken voor welke $n\in\mathbb{N}$ geldt dat $(n+1)!-20.(n-1)!=0$.

   $$(n+1)!-20.(n-1)!=0 \Leftrightarrow \overset{\neq 0}{\cancel{(n-1)!}}\,.\left[(n+1).n-20\right]=0 \Leftrightarrow n^2+n-20=0 \Leftrightarrow \cancel{n=-5} \vee \boxed{n=4}$$

4. ★⋆ In een klas met 22 leerlingen zijn er 6 leerlingen die spruiten lusten, 10 leerlingen die bloemkool lusten en 15 leerlingen die asperges lusten. Verder weet je het volgende:

   - Er is slechts één leerlingen die al deze zaken lust.
   - Er zijn 5 leerlingen die zowel asperges als bloemkool lusten.
   - Er zijn 3 leerlingen die zowel asperges als spruiten lusten.
   - Er is geen enkele leerling die enkel spruiten lust.

   Gebruik een Venndiagram om te bepalen hoeveel leerlingen geen enkele van deze drie groenten lusten?

   Er zijn 2 leerlingen die geen enkele van deze drie groenten lusten.

5. Met de cijfers 0, 1, 2, ..., 9 worden getallen van 5 verschillende cijfers gevormd. Een getal begint niet met 0.

   a) ★ Hoeveel zulke getallen bestaan er?

   Voor het eerste cijfer zijn er 9 mogelijkheden. De volgende cijfers worden in volgorde zonder herhaling gekozen uit de overige 9 cijfers. Het aantal is dus $9.V_9^4=9.9.8.7.6=27216$.

   *Alternatief*: Er zijn $V_{10}^5=30240$ 'getallen' met 5 verschillende cijfers waarvan er $V_9^4=3024$ beginnen met een 0. Er zijn dus $V_{10}^5-V_9^4=30240-3024=27216$ zulke getallen mogelijk.

   b) ★ Hoeveel zulke getallen beginnen er met 7 en eindigen er op 2?

   Er moeten nog 3 verschillende cijfers in volgorde gekozen worden uit de overige 8 cijfers.

   Het aantal is dus $V_8^3=8.7.6=336$.

   c) ★★⋆ Hoeveel zulke getallen zijn deelbaar door 5?

   Er zijn $V_9^4=3024$ mogelijke zulke getallen die eindigen op een 0.

   Er zijn $8.V_8^3=2688$ mogelijke zulke getallen die eindigen op een 5.

   } In totaal $5712$ zulke getallen.

   d) ★★ Hoeveel zulke getallen bevatten een 8?

   Er zijn $8.V_8^4=8.8.7.6.5=13440$ zulke getallen zonder 8. Dus zijn er $27216-13440=13776$ zulke getallen die wel een 8 bevatten.

Alternatief: Met de 8 vooraan zijn er $V_9^4 = 3024$ zulke getallen. Voor de 4 andere mogelijke plaatsen van de 8 zijn er telkens $V_9^4 - V_8^3 = 3024 - 336 = 2688$ zulke getallen (mogen niet beginnen met 0).

In totaal geeft dit dus $3024 + 4.2688 = 13776$ mogelijkheden.

e) ★★★ Hoeveel zulke getallen bevatten een 3 en een 4?

Voor de mogelijke plaatsen van de 3 en de 4 zijn er $V_5^2 = 20$ mogelijkheden. Er zijn dan nog $V_8^3 = 336$ mogelijke invullingen van de andere cijfers. Dus in totaal $20.336 = 6720$ mogelijke 'getallen'. Maar daarvan beginnen er een aantal met een nul. Dat aantal bereken je op dezelfde manier: $V_4^2 = 12$ mogelijke plaatsen voor de 3 en de 4 (met 0 vooraan) en dan nog $V_7^2 = 42$ mogelijke invullingen van de andere cijfers. Dit geeft in totaal $12.42 = 504$ mogelijke 'getallen' die beginnen met een nul. Het gezochte aantal is dus $6720 - 504 = 6216$.

*Alternatief*: Het getal kan beginnen met een 3. Dan zijn er nog 4 mogelijke plaatsen voor de 4 en $V_8^3 = 336$ mogelijkheden voor de andere cijfers. Dit zijn dus al $4.336 = 1344$ mogelijke getallen. Volledig analoog zijn er ook $1344$ mogelijke getallen die met een 4 beginnen en een 3 bevatten. Er zijn dan nog 7 andere mogelijke begincijfers (niet 3, 4 of 0). Om de 3 en de 4 te plaatsen zijn er dan nog $V_4^2 = 12$ mogelijkheden, en nog $V_7^2 = 42$ mogelijke invullingen voor de overige cijfers. Dit geeft in totaal nog $7.12.42 = 3528$ mogelijke zulke getallen. Samengevat zijn er dus $2.1344 + 3528 = 6216$ mogelijke zulke getallen.

6. ★★ Op school moeten 4 lokalen opnieuw geschilderd worden. Er is keuze uit 7 kleuren. Op hoeveel manieren kunnen deze lokalen geschilderd worden als elk lokaal een andere kleur moet krijgen.

De volgorde is belangrijk en herhaling is niet mogelijk, dus het aantal is $V_7^4 = 7.6.5.4 = 840$.

7. In een klas zitten 13 jongens en 7 meisjes. Er mogen 4 leerlingen van deze klas mee op uitwisseling.

a) ★ Hoeveel mogelijke keuzes voor deze leerlingen zijn er?

De volgorde is niet belangrijk en herhaling is niet mogelijk. Het aantal is dus $C_{20}^4 = 4845$.

b) ★★ Hoeveel keuzes zijn er als er evenveel meisjes als jongens moeten meegaan?

Kies twee meisjes: $C_7^2 = 21$, en kies twee jongens: $C_{13}^2 = 78$. Dit geeft in totaal $21.78 = 1638$ combinaties.

c) ★★ Hoeveel keuzes zijn er als de groep gemengd moet zijn (niet van hetzelfde geslacht)?

Er zijn $C_{13}^4 = 715$ combinaties met enkel jongens, en er zijn $C_7^4 = 35$ combinaties met enkel meisjes. Alle andere combinaties zullen gemengd zijn. Dit zijn er $4845 - 715 - 35 = 4095$.

8. Uit een boek van 52 kaarten neem je 5 kaarten.

a) ★★ Op hoeveel manieren kan dit als er exact twee azen bij zijn?

Kies 2 azen: $C_4^2 = 6$, en kies 3 andere kaarten: $C_{48}^3 = 17296$. In totaal dus $103776$ mogelijkheden.

b) ★★ Op hoeveel manieren kan dit als en minstens twee azen bijzijn?

Analoog aan a heb je met 3 azen $C_4^3.C_{48}^2 = 4.1128 = 4512$ mogelijkheden, en met 4 azen zijn er uiteraard maar 48 mogelijkheden. Dit geeft in totaal dus $103776 + 4512 + 48 = 108336$ mogelijkheden met minstens twee azen.

*Alternatief*: Je kan ook met de complementregel werken (van het totaal aantal die zonder of exact één aas aftrekken). Dat geeft dat: $C_{52}^{5}-C_{48}^{5}-C_{4}^{1}.C_{48}^{4}=2598960-1712304-778320=108336$ combinaties.

9. ★★ Bepaal de waarde(n) van $n\in\mathbb{N}$ waarvoor geldt dat $4\,.\,C_{n}^{3}-5\,.\,C_{n+1}^{2}=0$

$$\Leftrightarrow 4\,.\,\frac{n(n-1)(n-2)}{\cancel{6}}-\overset{15}{\cancel{5}}\,.\,\frac{(n+1)n}{\cancel{2}}=0\Leftrightarrow n\big(4(n-1)(n-2)-15(n+1)\big)=0\Leftrightarrow n\left(4n^{2}-27n-7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{n=0}\ \vee\ \boxed{n=7}\ \vee\ \cancel{n=-1/4}$$

10. ★ Hoeveel anagrammen bestaan er van het woord APPELFLAP

$$\overline{P_{9}^{2,3,2,1,1}}=\frac{9!}{2!3!2!}=15120$$

11. Voor een voorstelling is er een rij van 10 stoelen gereserveerd. Er komen slechts 6 van de 10 mensen opdagen.

a) ★ Op hoeveel manieren kunnen deze personen plaatsnemen?

$V_{10}^{6}=151200$

b) ★★ Bij hoeveel van deze mogelijkheden zullen ze alle 6 naast elkaar zitten?

____******/___******_/__******__/_******___/******____

Er zijn dus vijf mogelijkheden om alle 6 naast elkaar te zitten waarna we hun volgordes nog kunnen permuteren:

$5.P_{6}=3600$

12. De wiskunde olympiade bestaat uit dertig multiple-choice vragen met vijf antwoordmogelijkheden. Katrien begrijpt er werkelijk niks van en besluit op elke vraag te gokken.

a) ★ Hoeveel verschillende antwoordmogelijkheden heeft Katrien? $\overline{V_{5}^{30}}=5^{30}\approx 9{,}31.10^{20}$

b) ★ Hoeveel zijn er dit als ze evenveel A,B,C,D of E antwoordt? $\overline{P_{30}^{6,6,6,6,6}}=\dfrac{30!}{(6!)^{5}}\approx 1{,}37.10^{18}$

c) ★★ Hoeveel zijn er dit als ze nooit twee maal na elkaar hetzelfde antwoord geeft?

Voor haar eerste antwoord heeft ze 5 mogelijkheden, voor elk daaropvolgend antwoord telkens 4, dus:

$5.4^{29}=1{,}44.10^{18}$

13. ★* Zeventien mensen zijn vrijblijvend uitgenodigd om naar een receptie te komen. Op hoeveel manieren kan de receptie gevormd worden, als er minstens een iemand op afkomt?

De 17 personen komen wel of niet, dus het aantal is $\overline{V_{2}^{17}}-1=2^{17}-1=131071$

(de -1 staat er omdat de mogelijkheid waarbij ze allemaal niet opdagen moet uitgesloten worden).

14. ★★* In een universiteitsaula is een rij van 9 plaatsen voorbehouden voor 3 professoren die telkens vergezeld worden van 2 assistenten. Op hoeveel verschillende manieren kunnen ze allemaal gaan zitten?

$A_{P_1}P_1A_{P_1}A_{P_2}P_2A_{P_2}A_{P_3}P_3A_{P_3}$ is een mogelijke schikking.

Nu kunnen de proffen (met hun assistenten) nog onderling van plaats wisselen, dat kan op $P_{3}=3!=6$ manieren, en kunnen ook de assistenten per prof nog van plaats wisselen. Dat kan slechts op $P_{2}=2!=2$ manieren.

In totaal zijn er dus $6.2.2.2=48$ manieren om te gaan zitten.

15. In een fruitmand liggen 7 peren en 8 bananen. Deze moeten verdeeld worden onder 5 personen.

a) ★ Op hoeveel manieren kan dit als er geen beperking is behalve dat alles moet worden uitgedeeld?

$\overline{C_5^7} \cdot \overline{C_5^8} = C_{11}^7 \cdot C_{12}^8 = 330.495 = 163350$

b) ★★ Op hoeveel manieren kan dit als er geen beperking is en niet alles moet worden uitgedeeld?

Bestempel het 'laten liggen in de fruitmand' als 'zesde persoon', dan krijg je dus:

$\overline{C_6^7} \cdot \overline{C_6^8} = C_{12}^7 \cdot C_{13}^8 = 792.1287 = 1019304$

c) ★★ Op hoeveel manieren kan dit als iedereen minstens een peer en een banaan krijgt, maar verder niet alles moet worden uitgedeeld?

Deel eerst al voor iedereen een peer en een banaan uit. Dan moeten er nog 2 peren en 3 bananen verdeeld worden: $\overline{C_6^2} \cdot \overline{C_6^3} = C_7^2 \cdot C_8^3 = 21.56 = 1176$