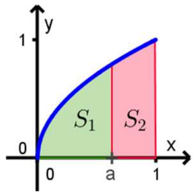
Oplossingen

1. De oppervlakte begrepen tussen de grafiek van $y=\sqrt{x}$, de x-as en de rechte $x=1$ wordt in twee stukken verdeeld door de verticale rechte $x=a$: een stuk S_1 en een stuk S_2.



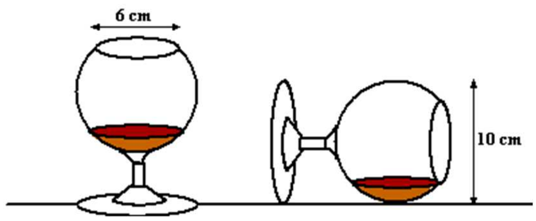
a) Voor welke waarde van a zal $S_1=S_2$?

$$\int_0^a \sqrt{x}\,dx=\int_a^1 \sqrt{x}\,dx \Leftrightarrow \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^a=\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_a^1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a^3}}{3}=\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{a^3}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{a^3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

b) V_1 en V_2 zijn de volumes van de lichamen die ontstaan door S_1 en S_2 te wentelen om de x-as. Voor welke waarde van a zal $V_1=V_2$?

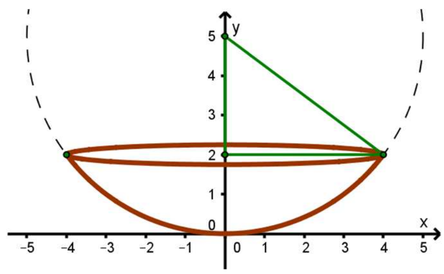
$$\cancel{\pi}\int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 dx=\cancel{\pi}\int_a^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Een enorm cognacglas bestaat uit een bol met diameter 10 cm. De opening aan de bovenkant is een cirkel met diameter 6 cm. Een goede cafébaas schenkt er echter maar een klein laagje cognac in. Het moet precies zoveel cognac zijn, dat het er nét niet uitloopt als je het glas op zijn kant legt. Zie de tekening.



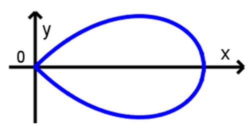
Bereken hoeveel cognac er in een goed-ingeschonken glas zit.

Kiezen we het assenstelsel zoals in de figuur rechts dan zie je dat de cirkel die het glas voorstelt als vergelijking heeft: $x^2+\left(y-5\right)^2=25$. Deze vergelijking valt uiteen in twee functies, namelijk $f\left(y\right)=\sqrt{25-\left(y-5\right)^2}$ en $g\left(y\right)=-\sqrt{25-\left(y-5\right)^2}$. We wentelen de functie f om de y-as.



$$V=\pi\int_0^2\left(25-\left(y-5\right)^2\right)dy=\pi\int_0^2\left(10y-y^2\right)dy=\pi\left[5y^2-\frac{y^3}{3}\right]_0^2=\pi\left(20-\frac{8}{3}\right)=\frac{52}{3}\pi \quad (\approx 54{,}45\ cc)$$

3. Rechts zie je de grafiek getekend van de kromme $\mathcal{R} \leftrightarrow y^2=\dfrac{x^2-x^3}{1+x}$, met $0\le x\le 1$.

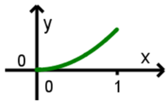


Als je deze grafiek wentelt om de x-as krijg je iets dat lijkt op een regendruppel.

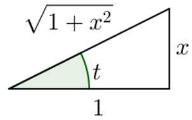
Bereken het volume van deze regendruppel.

$$V=\pi\int_0^1\frac{x^2-x^3}{1+x}dx=\pi\int_0^1\left(-x^2+2x-2+\frac{2}{1+x}\right)dx=\pi\left[-\frac{x^3}{3}+x^2-2x+2\ln\left|x+1\right|\right]_0^1=\pi\left(2\ln 2-\frac{4}{3}\right)\approx 0{,}166$$

4. Bereken de booglengte van de parabool $y=\dfrac{x^2}{2}$ in het interval $[0,1]$.



$$f'(x)=x \;\Rightarrow\; \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+x^2}\text{, dus } L=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$$



Stel $x=\tan t \Rightarrow dx=\sec^2 t\,dt$ en $\sqrt{1+x^2}=\sec t$, dan is $\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\sec^3 t\,dt$

Stel $u=\sec t \Rightarrow du=\sec t\tan t\,dt$ en $dv=\sec^2 t \Rightarrow v=\tan t$, dan is:

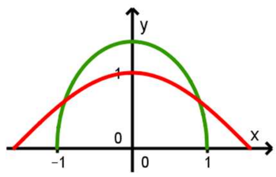
$$I=\int\sec^3 t\,dt=\sec t\tan t-\int\sec t\underbrace{\tan^2 t}_{=\sec^2 t-1}\,dt=\sec t\tan t+\int\sec t\,dt-\underbrace{\int\sec^3 t\,dt}_{=I}$$

Dus $I=\int\sec^3 t\,dt=\dfrac{1}{2}\sec t\tan t+\dfrac{1}{2}\ln\left|\sec t+\tan t\right|$, zodat we uiteindelijk krijgen:

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\cdot x+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$$

Dus $L=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$

5. Bewijs dat de lengte van de halve ellips met vergelijking $y=\sqrt{2-2x^2}$ gelijk is aan de lengte van een cosinusboog $y=\cos x$ tussen de twee nulpunten $-\dfrac{\pi}{2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$.



Voor de cosinusboog geldt: $L_c=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 t}\;dt$

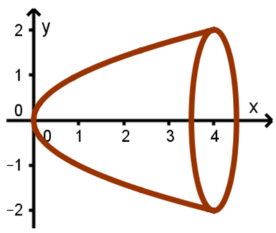
Voor de halve ellips geldt dat $y'=\dfrac{-4x}{2\sqrt{2-2x^2}}=\dfrac{-2x}{\sqrt{2-2x^2}}$, zodat daar:

$$L_e=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{\sqrt{2-2x^2}}\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{4x^2}{2-2x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2+2x^2}{2-2x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,dx$$

Stel hierin $x=\sin t$ dan worden de grenzen: $x=-1\Rightarrow t=-\pi/2$ en $x=1\Rightarrow t=\pi/2$.

Dan is dus: $L_e=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin^2 t}{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cos t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}}{\cancel{\cos t}}\cancel{\cos t}\,dt=L_c$ □

6. Als je de grafiek van de functie $f(x)=\sqrt{x}$ in het interval $[0,4]$ wentelt om de x-as dan krijg je een paraboloïde. Bereken de manteloppervlakte van deze paraboloïde.



$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}=\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}$$

Dus $S=\cancel{2}\pi\displaystyle\int_0^4\cancel{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\frac{4x+1}{\cancel{4}\cancel{x}}}\,dx=\frac{\pi}{4}\int_0^4\sqrt{4x+1}\,d\left(4x+1\right)=\frac{\pi}{\cancel{4}2}\left[\frac{\sqrt{(4x+1)^3}}{3/\cancel{2}}\right]_0^4=\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{17^3}-1\right)$